UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

DEPARTEMENT OF ECONOMICS

ESSAYS ON THE INSURANCE OF AGING-RELATED RISKS

DISSERTATION

PRESENTED IN PARTIAL REQUIREMENT

FOR THE DEGREE OF

DOCTORATE IN ECONOMICS

BY

LOUISE LAVOIE

JANUARY 2015

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
DÉPARTEMENT DES SCIENCES ÉCONOMIQUES

ESSAIS SUR L'ASSURANCE DES RISQUES LIÉS AU VIEILLISSEMENT

THÈSE PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE DU
DOCTORAT EN ÉCONOMIE

PAR
LOUISE LAVOIE

JANVIER 2015

RÉSUMÉ

Cette thèse est composée de trois chapitres étudiant, d'un point de vue théorique, les risques liés au vieillissement, et les mécanismes qui assurent ces risques. Dans les trois chapitres, un modèle simple de cycle de vie à deux périodes représente la vie active et la retraite. La survie à la deuxième période est incertaine, et sa probabilité est associée à l'espérance de vie de la personne.

Dans le premier chapitre, la décision de mode de vie pendant la période active détermine, de façon endogène, la longévité de chacun, et sa distribution dans la population. Cette décision correspond à un investissement en capital santé (Grossman (1972)). La population est définie sur un continuum de richesse. Les individus les plus riches adoptent de façon endogène un mode de vie plus sain, mais cette décision est influencée par les mécanismes qui assurent le risque de longévité. Les régimes publics de pension ont été décrits comme moins performants socialement, car ils empêchent les individus d'internaliser l'effet de leur décision de mode de vie sur leur longévité (Davies et Kuhn (1992), Philipson et Becker (1998)). Nous trouvons le même problème de non-internalisation avec l'assurance privée lorsque les types de risque ne sont pas observables : les contraintes d'incitation établies par l'assureur pour contrer l'antisélection éliminent le signal qui permet à l'individu d'internaliser son risque de longévité. Elles causent aussi une externalité d'information des individus riches, et donc à risque élevé, envers ceux à faible risque qui sont moins riches ; la couverture est complète pour les premiers et réduite pour les seconds. Nous démontrons aussi que les individus riches bénéficient d'une longévité supérieure à celle observée sous information parfaite, alors que la longévité des plus pauvres peut être inférieure. Ce chapitre compare aussi les couvertures publique et privée du risque de longévité en conservant les mêmes contraintes d'information. Un régime public simple, qui offre les mêmes conditions à tous, augmente les inégalités dans la longévité. Il est aussi régressif puisque les gens pauvres subventionnent les riches de par la corrélation entre richesse et longévité. Dans un système de pension avec un menu de contrats incitatifs, la rente d'information payée aux rentiers à plus haut risque crée le même genre de subvention des pauvres vers les riches, mais dans une moindre mesure, et la distorsion dans les montants de rente est atténuée par rapport à celle imposée par un assureur privé.

Le second chapitre considère deux imperfections, l'antisélection et les marchés incomplets, dans un marché assurant deux risques corrélés, soit le risque de longévité, et le risque de recours aux soins de longue durée (SLD). Un individu en bonne santé a une plus grande espérance de vie (risque élevé de longévité), mais il est un risque plus faible pour les SLD. Le recours aux SLD étant conditionnel à la survie, l'absence d'assurance pour un des deux risques, sous information parfaite, cause une distorsion dans la couverture de l'autre risque, comme démontré par Doherty et Schlesinger (1983). Sous antisélection,

cette distorsion atténue, et peut même éliminer, l'externalité d'information : ce résultat se produit par l'absence de contrainte d'aléa moral que permet la nature du risque de SLD. Notre modèle de rente reflète aussi le fait que ce marché ne respecte pas la propriété d'exclusivité, soit la possibilité qu'ont les assureurs d'observer le montant d'assurance. Afin de bâtir un contrat incitatif à deux dimensions, l'assureur peut alors remplacer le montant de rente par l'option de paiement au décès. Cependant, en l'absence de motif de legs, cette option n'incite pas à l'autosélection : l'équilibre doit être mélangeant, avec subvention du rentier en mauvaise santé envers celui en bonne santé.

Cet équilibre mélangeant tient autant lorsque la rente est vendue seule que dans un marché complet où les contrats sont vendus séparément. Dans ce marché complet, l'allocation pour la couverture de SLD n'est pas celle du marché incomplet, car la présence d'une rente, même imparfaite, modifie la distorsion. En comparaison, Fluet et Pannequin (1997) et Webb (2009) ont répliqué les résultats d'une analyse à un seul risque. Ces auteurs trouvent aussi qu'un contrat unique multirisque améliore le bien-être de tous en exploitant la corrélation négative entre les individus. Nous trouvons une contradiction à ce résultat, car la combinaison de la rente non exclusive avec une couverture SLD exclusive permet de séparer la tarification de la rente. La personne en bonne santé perd alors l'avantage d'une rente subventionnée, lequel n'est pas toujours compensé par le relâchement de la contrainte incitative sur sa couverture SLD : cette personne peut préférer s'assurer sur deux marchés séparés.

Le troisième chapitre compare une rente qui serait exclusive, comme souvent modélisée dans la littérature théorique, et la rente non exclusive introduite au chapitre deux. Sous information parfaite, cette distinction ne modifie en rien l'allocation. Sous antisélection, la présence ou non de motif de legs est cruciale. En l'absence de motif de legs, il y a un équilibre mélangeant avec la rente non exclusive, comme ci-dessus, alors que l'équilibre est séparateur avec le modèle exclusif : en effet, le montant de rente coïncide avec le transfert intertemporel et incite à l'autosélection.

Le motif de legs permet l'équilibre séparateur avec les deux modèles. Alors qu'il s'agit d'une généralisation du cas sans motif de legs pour la rente exclusive, le paiement au décès d'une rente non exclusive a une valeur qui diminue avec la probabilité de survie, et a donc un pouvoir incitatif. La capacité du modèle non exclusif à reproduire les résultats empiriques de Finkelstein et Poterba (2004) seulement avec le motif de legs peut s'interpréter comme une évidence que les rentiers tirent une utilité du bien-être de leurs héritiers.

Ainsi, les chapitres deux et trois démontrent deux circonstances pour qu'il y ait équilibre séparateur avec un contrat non exclusif : sa combinaison dans un contrat multirisque avec une seconde couverture exclusive, ou l'utilisation d'une caractéristique du contrat, autre que la quantité, à laquelle l'assuré reconnaît une valeur.

ABSTRACT

This thesis proposes three chapters analyzing, from a theoretical point of view, aging-related risks, and the mechanisms insuring these risks. All chapters use a simple two-period model for the active life and the retirement period. Survival during the second period is uncertain, with a probability associated to life expectation.

In the first chapter, the lifestyle choice during the active life endogenously defines the longevity of each person, as well as the longevity distribution in the population. This choice is related to an investment in health capital (Grossman, 1972). Population being defined over a continuum of wealth, wealthier people adopt a healthier lifestyle, but they also take into account the longevity insurance mechanism. Public pension systems were said to be socially inefficient, because they prevent people to internalize the effects of their lifestyle decision on their longevity and thus, on the cost of insuring their longevity (Davies and Kuhn, 1992, Philipson and Becker, 1998). We find the same risk-internalization failure with private insurance under asymmetric information : the revelation mechanism that counters adverse selection eliminates the signal that allows under perfect information the individual to internalize the effects of his lifestyle choice. Adverse selection also generates a negative information externality on any individual presenting lower wealth and risk profile than the wealthiest and riskiest individual ; the latter obtains complete coverage, while the former obtains reduced coverage. We also show that wealthier people benefit from higher longevity than under perfect information, but the longevity of less well-off people may be lower. This chapter also compares public and private coverage under the same information constraint. A simple public system with the same conditions for everybody increases disparities in longevity, and it is regressive since poor people subsidize rich people from the correlation between wealth and longevity. In a public system with an incentive compatible menu of contracts, the information rent paid to wealthier retirees is regressive too, but to a lower extent, and it produces lower distortion in the annuity payments than under the private system.

The second chapter considers the imperfections of adverse selection and incomplete markets in an insurance market facing two correlated risks : the longevity risk, and the long-term care (LTC) risk. A person in good health has greater life expectancy (high longevity risk), but presents a low-risk profile for LTC. The need for LTC being conditional upon survival, the absence of insurance for one of the risks under perfect information causes an upward distortion in the other risk coverage, as shown by Doherty and Schlesinger (1983). Under adverse selection, this distortion attenuate, and may even eliminate, the information externality : this result is possible from the absence of moral hazard on the LTC risk. Our annuity model reflects the fact that this market does not respect the exclusivity property : insurers cannot observe the amount of insurance. In order to build a two-dimension incentive menu of contracts, the insurer may then replace the annuity

amount with the option of payment upon death. However, with no bequest motive, this option does not incite to self-selection : it results a pooling equilibrium, with the unhealthy annuitant subsidizing the healthy one.

This pooling equilibrium holds in the situation where the annuity is the sole insurance available, as well as when it is sold in parallel with the LTC insurance. In this complete market, the amounts of LTC coverage differ from those of the incomplete market, because the availability of the annuity, even imperfect, modifies the distortion. In comparison, Fluet and Pannequin (1997) and Webb (2009) replicate the single-risk analysis. These authors also find that a unique multiple-risk contract improves all people welfare by exploiting the negative correlation within the population. Our result contradicts this outcome, since the combination of a nonexclusive annuity with an exclusive LTC coverage allows a separating pricing of the annuity. The healthy person looses the advantage of a subsidized annuity, and is not necessarily compensated by the less constrained LTC coverage : he may then prefer the insurance sold on two distinct markets.

The third chapter compares an annuity that would be exclusive, as it is often modeled in the theoretical literature, with the nonexclusive annuity introduced in the second chapter. Under perfect information, allocation and welfare are the same. Under adverse selection, the bequest motive makes a difference. Without bequest motive, the nonexclusive annuity results in a pooling equilibrium, as above, while the equilibrium is separating with the exclusive model ; indeed, the annuity amount also captures the intertemporal transfer and incites to self-selection.

The equilibrium is separating with both models when the bequest motive is taken into account. While it is a generalization of the case without bequest motive for the exclusive annuity, the payment upon death of the nonexclusive annuity has a value that decreases with the survival probability, and may then incite to self-selection. The fact that the nonexclusive model reproduces the empirical results of Finkelstein and Poterba (2004) only with the bequest motive may be viewed as an evidence that annuitants value their heir welfare.

Therefore, Chapters two and three show two circumstances that allow separating equilibrium with a nonexclusive contract : its combination with an exclusive coverage in a multiple-risk contract, or the recourse to a contract characteristic, other than the quantity, that is valued by the insured.

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

Introduction générale

L'espérance de vie des pays industrialisés n'a cessé de croître au cours des dernières décennies, les gains étant particulièrement marqués chez les populations vieillissantes, comme l'illustre le tableau 1 pour le Canada.

	Hommes		Femmes	
Année	**À 65 ans**	**À 85 ans**	**À 65 ans**	**À 85 ans**
1925	13.1	4.3	13.8	4.8
1965	13.6	4.6	16.7	5.3
2005	17.8	5.8	20.9	7.1

Tab. 1 – Évolution de l'espérance de vie au Canada chez les personnes âgées. Source : "Human Mortality Database", 2013

Cette tendance s'observe aussi depuis quelques années dans les pays en voie de développement, grâce à une qualité de vie qui rejoint les standards occidentaux. Cependant, une telle tendance n'est pas exempte d'incertitude, la moyenne représentée par l'espérance de vie cachant, dans les faits, une grande variation de longévité entre les individus : par exemple, Benartzi et al. (2011) ont noté une différence de 22 / 23 ans entre les premiers et derniers déciles de l'âge au décès des Américains / Américaines de 65 ans. De plus, l'évolution future de cette tendance n'est pas garantie : alors que les plus optimistes anticipent une continuation de la tendance passée avec une longévité de 120 ans ou plus qui deviendrait la norme, les pessimistes considèrent que la génération présentement active pourrait, pour la première fois depuis des siècles, vivre moins longtemps que ses parents. En effet, la croissance économique s'accompagnerait d'une dégradation de l'environnement, d'une plus grande sédentarité, et d'une industrialisation de l'alimentation, lesquels auraient un effet négatif sur la santé et la longévité qui contrebalancerait les avancées de la médecine.

Comme autre source d'incertitude, le vieillissement augmente les probabilités de maladies graves et dégénératives nécessitant des soins lourds, autant pour les proches que pour les services sociaux. De plus, il entraîne habituellement une baisse de l'état général de santé, laquelle ne limite que légèrement la qualité de vie de l'individu s'il bénéficie de soutien approprié dont les coûts sont souvent non négligeables. Enfin, la capacité des sciences médicales et pharmaceutiques à traiter ces différents états de santé dans le futur, ainsi que les dépenses toujours croissantes associées à leur plus grande sophistication, connaît sa part d'aléa.

La charge financière liée au vieillissement concerne donc les montants nécessaires chaque année pour assurer le bien-être d'une personne âgée, ainsi que la période sur laquelle ces ressources seront nécessaires. Au niveau d'une population, le problème s'alourdit lorsque s'ajoute à ce vieillissement une baisse de natalité, provoquant un déséquilibre dans la structure des âges. Par exemple, alors qu'en 1971, il y avait au Canada 6.7 personnes âgées de 20 et 64 ans pour une personne âgée de 65 ans ou plus, ce ratio était de 4.2 en 2012 ;[1] selon certaines projections, il chutera à 2.8 en

[1]Source : Statistique Canada, CANSIM, Tableau 051-0001, Estimation de la population selon le groupe d'âge, pour les deux sexes, au 1er juillet.

2025, puis à 2.3 en 2040.[2] Avec de moins en moins de travailleurs pour subvenir aux besoins des retraités, un financement par répartition qui ne compte que sur le transfert intergénérationnel n'est donc plus soutenable.

Dans ce contexte, les impacts du vieillissement des populations et les réformes nécessaires pour y faire face sont devenus un sujet récurrent de préoccupation pour le public en général et pour les décideurs, mais aussi dans la recherche académique. Ces questions sont d'autant d'actualité que dans plusieurs pays industrialisés, les contraintes budgétaires des gouvernements incitent à réformer les systèmes de protection sociale, tant pour la couverture santé que pour la protection de revenus des retraités. De même, l'augmentation attendue de ces coûts, ainsi que la réorganisation du monde du travail avec la montée du travail indépendant et les défis de productivité, amènent les employeurs à limiter la partie de rémunération dédiée aux divers types d'assurance. Le résultat est que les individus seront de plus en plus appelés à se protéger contre ces risques par leurs propres moyens plutôt qu'être pris en charge par l'État ou par leurs employeurs.

Il devient ainsi important de comprendre les différentes sources de protection offertes aux individus, leur efficacité, et les imperfections du marché qui limitent l'accès à cette protection. Cette thèse examine donc les mécanismes assurant les risques liés à la longévité, qu'ils soient de source privée ou publique, et qu'ils consistent en solution individuelle ou collective. En particulier, sont analysés les questions d'asymétrie d'information des marchés de l'assurance, et l'effet de ces imperfections sur le comportement des individus.

À l'image d'une importante littérature théorique sur le sujet, notre analyse repose

[2]Source : Statistique Canada, CANSIM, Tableau 052-0005 , Population projetée, par groupe d'âge, pour les deux sexes, selon le scénario M4 (croissance moyenne), au 1er juillet.

sur une schématisation simple du cycle de vie avec un modèle à deux périodes représentant la vie active et la période de retraite. Comme c'est généralement le cas pour une majorité de la population, nous supposons que la vie active se déroule sans aléas. Par contre, la seconde période n'est vécue qu'avec une certaine probabilité ; une survie sur les deux périodes correspond à une longévité supérieure à l'espérance de vie, alors qu'une survie sur la première période seulement correspond à une personne qui n'atteint pas son espérance de vie. C'est pendant la période active qu'une personne établit un plan financier en anticipation des événements incertains qui pourraient survenir après son départ à la retraite, et qui affecteraient son niveau de bien-être.

Le premier chapitre se penche uniquement sur le risque de longévité. Par contre, la probabilité de survie est déterminée de manière endogène par le choix de mode de vie de l'individu. Selon un concept établi par Grossman (1972), ce choix correspond à un investissement dans le capital santé, dont le rendement se traduit, de façon incertaine, par une plus grande longévité. Nous supposons aussi que la population est distribuée, de façon exogène, sur un continuum de richesse. Naturellement, nous obtenons que la richesse induit un mode de vie plus sain, et donc une plus grande longévité : les gens riches vivent plus longtemps, et *vice versa*, mais leur risque de longévité coûte plus cher à assurer.

Malgré le lien monotone entre richesse et longévité, le choix de mode de vie est aussi influencé par le mécanisme disponible pour assurer la pension de retraite. En comparaison de la question récurrente de l'impact des changements démographiques sur le financement des retraites, le modèle amène donc la question inverse de l'effet du mécanisme de retraite sur le vieillissement, ainsi que sur les inégalités constatées dans la population quant à la longévité.

Sur un marché concurrentiel de rente viagère, un assureur privé qui observe le profil de ses clients peut demander à chacun de payer sa prime actuarielle. Chaque client est donc en mesure de considérer qu'un plus grand investissement en capital santé se traduira par une prime de rente viagère plus élevée. En internalisant ainsi les conséquences de son choix de mode de vie, chacun limite son investissement en capital santé, ce qui réduit la longévité de la population.

Par rapport aux auteurs qui ont précédemment étudié cet effet du mécanisme de retraite sur la longévité, soit Davies et Kuhn (1992), Philipson et Becker (1998), et Platoni (2010), le fait de tenir compte de l'hétérogénéité de la population permet d'envisager aussi les conséquences sur les disparités dans la longévité. Cette hétérogénéité conduisant à une hétérogénéité dans le niveau de risque, le problème d'antisélection apparaît donc de façon endogène.

En effet, plus grande est l'espérance de vie d'un rentier, plus élevé est son risque d'assurance, et plus grand est son avantage à dissimuler cette caractéristique lorsque l'assureur ne peut observer le profil de ses clients. L'assureur établit alors un menu incitatif afin de contrer le problème d'antisélection : comme c'est le cas pour les deux autres chapitres, nous nous référons à la définition d'équilibre de Rothshild et Stiglitz (1976). Selon le résultat standard, la personne à plus haut risque, et donc plus riche, bénéficie du montant de rente qu'elle désire, alors que plus bas est un individu dans l'échelle de la richesse, plus grande est l'externalité d'information qu'il subit sur son montant de rente.

Nous constatons aussi que le mécanisme incitatif, en éliminant l'avantage de chaque contrat pour tout autre assuré, élimine aussi le signal qui permet d'internaliser les effets du mode de vie sur le prix de la rente. Comparé à la situation sous information parfaite, il en résulte alors une distorsion à la hausse de la longévité, et cette distorsion augmente avec la richesse. Combiné à l'effet dissuasif de l'externalité d'information, ce problème de non-internalisation amène une plus grande disparité dans la longévité de la population.

Nous considérons ensuite un système public de retraite, qui peut aussi s'interpréter comme un régime de rentes d'employeur à prestations déterminées. Afin de ne pas accorder un avantage informationnel à ce secteur qui rendrait infondée toute comparaison avec le système privé sous antisélection, nous supposons que l'administrateur d'un tel régime n'a pas plus accès à l'information d'un individu en particulier. Par contre, la nature obligatoire d'un système public lui permet de s'éloigner d'une tarification actuarielle, dans la mesure où la contrainte budgétaire est respectée au niveau de la population.

Dans un premier temps, un système simple, avec contribution et prestation unique pour tous, élimine les problèmes de sélection, et reflète les caractéristiques de régimes souvent observées. Par exemple, ce régime comble presque totalement les besoins des gens pauvres, mais est largement insuffisant pour les gens riches. Par contre, dans une population de taille infinie, un individu ne peut envisager l'effet de sa longévité sur le coût global du système, et le problème de non-internalisation est aussi présent. Philipson et Becker (1998), qui associent ce problème à l'aléa moral, ont d'ailleurs suggéré que l'augmentation de la longévité observée aux États-Unis depuis le milieu du vingtième siècle pourrait, en partie, découler de l'implantation de la Sécurité de la vieillesse (OAS), ajoutant de façon imprévue une pression sur les finances publiques. Ils affirment également l'optimalité d'un système privé de retraite par sa capacité à éviter le problème de non-internalisation : nous avons dit ci-dessus que ceci est vrai seulement sous information parfaite.

Dans un système où chacun paie le même prix, les gens à faible risque subventionnent ceux à risque élevé, et le lien entre longévité et richesse rend ce système régressif : ce genre de design va donc à l'encontre de la vision de Diamond (1997), qui veut que la Sécurité Sociale tienne le double rôle d'assurance et de mécanisme redistributif.

De plus, comme le mentionnent Davies et Kuhn (1992), cette subvention a aussi un effet revenu sur le choix de mode de vie, ce qui aggrave les inégalités dans la longévité déjà augmentées par le problème de non-internalisation. Cependant, nous pensons que cet effet est plutôt marginal, étant donné que l'importance de la prestation, et donc du régime, diminue avec la richesse.

Toujours dans le cadre d'un régime public, nous considérons enfin un système avec une contribution et une prestation plus en adéquation avec les besoins de chacun. Dans le même contexte informationnel que le marché privé, ce menu de contrats doit aussi être révélateur. En se référant à Salanié (1994) afin de résoudre un tel système, l'échelle de contribution inclut maintenant une rente d'information qui augmente avec le risque, et donc avec la richesse : elle est donc aussi régressive, mais dans une moindre mesure, que dans le système public à contribution unique. De plus, contrairement au système privé où la contribution doit être actuarielle, la rente d'information agit dans le mécanisme révélateur afin d'atténuer la distorsion dans les quantités. Globalement, par rapport à l'assurance privée, ce système induit une plus grande disparité dans la longévité de par l'incitation découlant de la tarification plus régressive, mais il permet un plus grand bien-être de la population, du seul fait que le problème est moins contraint.

Dans le deuxième chapitre, le risque de longévité est exogène, mais la personne est aussi confrontée à un risque de soins de longue durée (SLD). L'intérêt d'étudier ces deux risques simultanément est multiple. Premièrement, la littérature empirique observe que les marchés privés qui assurent ces risques sont sujets aux mêmes imperfections. Ces deux marchés sont limités, voir incomplets, une couverture complète du risque étant difficilement accessibles pour la plupart des gens. L'asymétrie d'information est une autre imperfection commune aux deux risques, mais se réduit essentiellement à une question d'antisélection. En effet, les prestations des contrats de rente viagère et d'assurance de SLD étant payables à des personnes âgées dont l'état de santé a été déterminé par le mode de vie passé et le bagage génétique, ces personnes ont peu d'influence sur la réalisation des risques et sur les montants versés par les assureurs, ce qui exclut la possibilité d'aléa moral.

Ces risques présentent aussi une structure de corrélation particulière qui déterminera l'équilibre d'un marché concurrentiel confronté aux imperfections mentionnées ci-dessus. En premier lieu, la possibilité de SLD n'existant que pour les individus vivant longtemps, il y a une corrélation positive entre les distributions de probabilité des risques de longévité et de SLD pour un individu en particulier : ce genre de corrélation a été étudié par Doherty et Schlesinger (1983) dans un marché incomplet sous information parfaite.

Deuxièmement, une littérature empirique initiée par Fries (1980) observe que dans les pays industrialisés, le gain en espérance de vie s'accompagne d'un gain en espérance de vie sans invalidité (EVSI) grâce au meilleur état de santé de la population vieillissante. Par exemple, Cutler, Ghosh, et Landrum (2013) ont calculé que l'espérance de vie et la EVSI d'un américain de 65 ans ont augmenté respectivement de 0.7 et 1.6 année entre 1991 et 2009. En divisant la population de retraités en deux catégories selon leur état de santé, il est donc justifié de penser qu'une personne avec une plus grande espérance de vie est aussi en meilleure santé et a une probabilité plus faible d'avoir recours aux SLD. Il y a alors une corrélation négative dans l'exposition aux risques entre les individus d'une population.

Ainsi, la corrélation positive des risques individuels reflète la demande grandissante pour les SLD avec l'âge, alors que la corrélation négative entre les individus d'une population reconnaît qu'une personne en mauvaise santé a moins de chance de survie qu'une personne en bonne santé, mais advenant que les deux survivent, la première est plus à risque d'exiger des SLD que la seconde.

D'un point de vue théorique, Fluet et Pannequin (1997) ont étudié un contexte multirisque présentant une corrélation soit positive, soit négative, au niveau de la population, mais une indépendance entre les risques d'un individu donné, alors que Webb (2009) a considéré les mêmes risques et la même structure de corrélation que dans ce chapitre. Ces auteurs ont démontré qu'en présence d'antisélection, l'exploitation de la corrélation entre les individus que permet un contrat multirisque procure un gain de bien-être par rapport à un marché où il faudrait assurer ces risques auprès d'assureurs différents. Spillman, Murtaugh, et Warshawsky (2001) ont obtenu des résultats similaires en simulant les marchés de rentes et d'assurance de SLD. Ce chapitre cherche à valider ces résultats lorsque le modèle tient compte de réalités de marché des assurances longévité et SLD qui sont souvent laissées de côté dans la littérature théorique.

Comme première caractéristique propre à notre modèle, considérant que l'asymétrie d'information se limite à l'antisélection, et qu'un assureur dans un marché concurrentiel à profit nul est indifférent à la quantité d'assurance vendue, nous n'imposons pas de contrainte d'aléa moral qui proscrirait la surassurance. La surassurance s'avère souhaitable pour l'individu, car elle procure une certaine protection sur un second risque peu ou pas assuré, mais qui peut se produire simultanément, de par la corrélation positive des risques pour un individu : une assurance de SLD peut donc offrir une compensation supérieure au montant de perte. Sous antisélection, nous trouvons que la surassurance atténue l'externalité d'information et peut même l'éliminer.

La deuxième particularité de notre modèle prend acte du fait que les contrats de rentes ne sont pas exclusifs. Lorsqu'il y a exclusivité, un assureur peut observer et contrôler la quantité d'assurance achetée par un individu. En l'absence d'exclusivité, l'individu peut acheter plusieurs contrats de rente et ainsi contourner, sous antisélection, un menu révélateur qui s'appuierait sur les dimensions de prime unitaire et de quantité d'assurance. Cependant, des caractéristiques du contrat autres que la quantité d'assurance, comme une option de paiements lors du décès prématuré du rentier, peuvent tenir lieu de deuxième dimension. Cette option, par laquelle l'assureur paie une portion de chaque dollar de rente quoi qu'il advienne, est assimilable à un mécanisme d'épargne, et ne procure pas de protection contre le risque de longévité, alors que le reste de la rente est viager. Brown (2007) mentionne une importante prévalence de ces options sur le marché américain, alors que Finkelstein et Porterba (2004) ont mesuré qu'elles existent sur près de 70% des rentes vendues au Royaume-Uni. Ces auteurs ont aussi identifié la présence de sélection sur ces options, mais pas sur la quantité de rente, ce qui est cohérent avec l'absence de propriété d'exclusivité.

Notre modèle laisse donc l'assuré choisir sa quantité de rente, que ce soit sous information parfaite ou imparfaite. Cependant, la définition du contrat inclut la portion viagère de chaque dollar de rente, laquelle, lorsque combinée à la prime unitaire, peut être contrainte par l'assureur afin d'établir un contrat incitatif non linéaire. À notre connaissance, la littérature théorique telle Eckstein, Eichenbaum et Peled (1985), Eichenbaum et Peled (1987), Webb (2009), Davidoff (2009), Platoni (2010), modélise la rente viagère comme un montant absolu versé en cas de survie, sans tenir compte d'options de paiements au décès. En permettant à l'assureur de contraindre le montant de rente dans un mécanisme non linéaire à la Rothshild et Stiglitz (1976), cette littérature impose implicitement la propriété d'exclusivité.

La recherche de l'équilibre pour ce marché de rente fait par contre ressortir qu'un individu qui n'a pas de motif de legs n'accorde pas de valeur à l'option de paiement au décès, et souhaite donc une rente entièrement viagère. Ne pouvant discriminer qu'avec la prime unitaire, l'assureur n'a d'autre choix, sous antisélection, que d'offrir un contrat mélangeant, ce qui constitue une subvention des retraités en mauvaise santé envers ceux en bonne santé.

Une première partie de ce chapitre analyse chaque risque séparément dans un marché incomplet, c'est-à-dire lorsque le marché ne peut assurer qu'un seul risque de façon exogène. Une fois cerné le fonctionnement de chaque contrat, tant sous information parfaite qu'asymétrique, la démarche est appliquée par la suite à un marché complet, mais où une couverture incomplète apparaît comme une conséquence de l'antisélection : on peut donc y voir un marché "partiellement incomplet".

Le marché complet est d'abord envisagé comme deux assureurs opérant en parallèle sur leur propre marché. Dans ce contexte multirisque sous antisélection, Fluet et Pannequin (1997) et Webb (2009) reproduisent, sur chaque marché, un équilibre séparateur, avec les allocations que donnerait une étude de chacun des risques pris séparément. Nous obtenons aussi, pour les rentes, la même allocation que lorsque ce produit est le seul disponible, soit un équilibre mélangeant. En comparaison, l'équilibre de l'assurance SLD est séparateur comme dans le marché incomplet, mais avec une allocation différente, car la présence d'un marché de rente imparfait modifie la distorsion dans les montants non contraints.

Enfin, dans un marché complet où un seul assureur offre un contrat incitatif multirisque, l'équilibre est séparateur, et le risque dominant détermine l'identité des assurés à bas et haut risque, ce dernier se retrouvant en une situation d'information parfaite. La différence dans le design de chaque couverture affecte la manière de construire le contrat de la personne à faible risque. De plus, ce contrat voit la couverture du risque de SLD être contrainte avant celle du risque de longévité : la priorité donnée à la longévité s'explique par le fait que ce risque se matérialise que la personne soit en bonne ou en mauvaise santé.

Comme autre résultat, la combinaison d'une couverture de longévité avec un contrat exclusif permet la séparation de la couverture de rente, où chaque personne paie sa prime actuariellement juste. Ainsi, lorsque la personne en bonne santé est le risque élevé, elle perd l'avantage de la rente subventionnée obtenue avec des contrats séparés, mais bénéficie d'une pleine couverture contre le risque de SLD. Lorsque cette personne est le risque faible, sa prime élevée sur la rente réduit la nécessité de contraindre la couverture d'assurance SLD. Dans les deux cas, il est possible qu'elle préfère la situation où les risques sont assurés sur des marchés séparés, ce qui contredit les résultats de la littérature qui conclut à l'avantage d'un contrat multirisque dans toutes les situations, pour tous les types d'assurés.

Le troisième chapitre de cette thèse revient sur la modélisation des contrats de rente dans un contexte de risque de longévité exogène. Plus particulièrement, lorsqu'un équilibre sous antisélection est établi, il examine comment la modélisation d'un contrat de rente qui considère la propriété d'exclusivité, comme c'est habituellement le cas dans la littérature théorique, se distingue d'une modélisation où cette propriété ne tient pas, ce qui nous semble plus proche de la réalité du marché, et qui est présentée au chapitre précédent.

La propriété d'exclusivité est propre à plusieurs types de contrats d'assurance autre que les rentes. Selon Rothshild et Stiglitz (1976), un équilibre compétitif sous antisélection, défini par une tarification à deux dimensions, soit le prix et la quantité, requiert que tous les assureurs connaissent le montant total d'assurance acheté par un individu. Lorsque la littérature théorique modélise une rente comme un montant absolu versé en cas de survie, et qu'elle permet à un assureur confronté à l'antisélection de contraindre ce montant, elle se trouve en fait à attribuer la propriété d'exclusivité à ce contrat. La prédiction obtenue contredit alors le résultat empirique de Finkelstein et Porterba (2004) d'absence de sélection sur le montant de rente.

Sans exclusivité, la quantité de rente ne peut plus faire partie du contrat incitatif, mais il est possible de la remplacer par la répartition de chaque dollar de rente entre une partie viagère et une partie non viagère. La capacité de cette répartition à constituer la deuxième dimension de la tarification tient au fait qu'elle respecte la condition de non réplicabilité : une personne ne peut augmenter la portion viagère des rentes reçues en achetant plusieurs contrats similaires avec plusieurs assureurs.

Nous représentons donc le modèle exclusif de la littérature comme un contrat par lequel l'assureur peut proposer, pour un prix unitaire donné, un montant de rente entièrement viager ; il n'y a pas d'options de paiement au décès. Si ce montant ne comble pas tous les besoins de transfert intertemporel (c'est-à-dire de revenu de retraite), l'individu peut investir dans une obligation d'épargnes traditionnelle, dont le montant n'est pas observable par l'assureur.

Notre deuxième modèle relâche l'hypothèse d'exclusivité. La quantité de rente achetée, que l'assureur ne peut contrôler, couvre tous les revenus de retraite. Comme deuxième dimension du menu révélateur, l'assureur peut imposer la portion de chaque dollar de rente qui sera viagère. La couverture contre le risque de longévité s'exprime ainsi comme une proportion du revenu de retraite, alors qu'elle est exprimée comme un montant absolu de rente avec le premier modèle.

Lorsqu'aucune valeur n'est accordée au legs, les deux modèles génèrent sous information parfaite des résultats identiques et conformes à la littérature initiée par Yaari (1965) : les individus souhaitent un revenu de retraite entièrement viager et les héritiers ne reçoivent rien en cas de décès prématuré. Sous antisélection, l'équilibre du modèle exclusif est séparateur, et chacun paie sa prime actuarielle pour son revenu viager. La personne à risque élevé reçoit son contrat de premier rang, et la personne à faible risque reçoit une rente moins élevée que désiré, et peut avoir recours à l'épargne traditionnelle.

Par contre, avec le modèle non exclusif, tout individu a une utilité marginale strictement croissante en la portion viagère du revenu de retraite. Cette dimension ne pouvant établir une discrimination entre les individus, nous obtenons un équilibre mélangeant. La couverture contre le risque de longévité consiste en une solution en coin, soit un revenu de retraite entièrement viager, et le prix unique correspond à la prime actuarielle de la population.

Il est ainsi possible de discriminer sur la dimension associée à la couverture du risque de longévité du modèle exclusif, car son optimum correspond à une solution intérieure : en effet, le montant de rente est aussi utilisé pour déterminer le transfert intertemporel. Cette dimension combine alors deux concepts, soit transfert intertemporel et couverture viagère. En comparaison, ces deux concepts sont identifiés par deux variables distinctes dans le modèle non exclusif, soit le montant de rente et la portion viagère, respectivement.

Avec un motif de legs générant suffisamment d'utilité, un individu ne souhaite pas annuitiser le total de son revenu de retraite afin de laisser un paiement aux héritiers en cas de décès prématuré. Sous information parfaite, une partie du revenu de retraite est donc non viagère, qu'il s'agisse d'obligation d'épargnes dans le modèle exclusif ou d'une portion de la rente dans le second modèle. Puisque le lissage des utilités marginales instantanées ne dépend pas des propriétés de la rente, les deux modèles produisent les mêmes allocations, et naturellement, le même bien-être.

Sous antisélection, l'équilibre de marché est séparateur pour les deux modèles. La personne à risque élevé obtient son contrat de premier rang, alors que la personne à faible risque obtient généralement un contrat sous-optimal avec une portion viagère plus faible que désiré. Dans le cas du premier modèle, l'ajout du motif de legs n'est qu'une extension du cas sans motif de legs. Avec le modèle non exclusif, la solution intérieure pour la portion viagère optimale de la rente, telle que permise par le motif de legs, rend possible la discrimination sur la deuxième dimension du contrat, d'où l'équilibre séparateur.

Avec les deux modèles, la personne à faible risque peut aussi obtenir son contrat de premier rang : il s'agit d'une situation où l'assuré à risque élevé souhaite une couverture suffisamment supérieure à celle souhaitée par l'assuré à risque faible pour détourner le premier assuré du contrat du second. À l'exception de ce cas, l'absence de propriété d'exclusivité diminue le bien-être.

Chapitre 1

Lifestyle and Endogenous Longevity Risk : Asymmetric Information in Private and Public Insurance

1.1 Introduction

The longevity risk presents two possible outcomes : surviving beyond savings in case of a very long life or dying too early to enjoy the money saved at the expense of past consumption. Although the life expectancy of the older population markedly rose over the last decades, the trend is far from being ensured, and the actual longevity of a retiree still spreads over an important range.[1] This demographic

[1]Benartzi and al. (2011) note a difference of 22 (23) years between the 10th and 90th percentiles of the age of death for an American man (woman) aged 65.

evolution is a challenge to the sustainability of the pension mechanisms that cover the longevity risk, and the reforms that would ensure appropriate resources to the aging population remain open to debate. Indeed, this subject is recurring in the academic literature, but also among people, policy makers and insurers. Notwithstanding this question, this paper aims to understand the reverse relationship where the pension mechanisms influence people's behavior and longevity, as well as disparities in longevity.

A pension mechanisms is an insurance against the longevity risk that guarantees income throughout the retirement years and avoids unwanted bequest.[2] This protection takes two main forms. A first type of protection can be public, such as governmental Old-Age Security (OAS) programs, or collective, such as defined-benefit pension plans (DB) sponsored by an employer or a union. The common characteristics of these systems are the mandatory funding through taxes, direct contributions or lower wages imposed on all participants, and the similar benefits received by all retirees. The second form of protection, private insurance, allows each individual to transform his own retirement savings (including accumulation in defined-contribution plans (DC) and tax-exempt accounts) into a life-contingent income stream, known as an annuity, that will meet his specific retirement needs.

To explore the impact of different types of coverage on longevity and its inequalities, we define a population as a continuum of wealth in a two-period model (active life and retirement). During the first period, people select a lifestyle that implies a global investment in health. An investment in health requests costly efforts, that may be financial or take the form of a reduction in the utility of consumption, and

[2]It is assumed throughout this paper that people prefer consuming themselves one dollar rather than leaving it to their heirs.

the return is uncertain as it takes the form of a higher probability of living over the second period. This choice endogenizes the longevity risk as Grossman (1972, 1998) and Ehrlich and Chuma (1990) have pointed out. Without surprise, it follows that a wealthier person prefers a healthier lifestyle, and that wealth inequalities translate into longevity inequalities.

During his active life, an individual also makes financial decisions toward retirement, such as investing in saving bonds and in annuities. Given that the type of insurance influences the savings and lifestyle decisions, we first analyze a competitive private annuity market. Under perfect information, everyone obtains complete coverage and pays the fair premium. The ability for an individual to assess the impact of a greater longevity on his annuity premium allows him to internalize the otherwise external cost of investing in health.

Greater longevity meaning higher risk, adverse selection is handled with a separating equilibrium, as defined by Rothshild and Stiglitz (1976). The coverage is characterized over the continuum of risks by a path and a transversality condition. Interestingly, the revelation mechanism that counters adverse selection also eliminates the signal that allows under perfect information the individual to internalize the effects of his lifestyle choice. The resulting upward distortion in health and longevity is a form of moral hazard that we call the risk-internalization failure. This failure is also discussed by Davies and Kuhn (1992), Philipson and Becker (1998) and Platoni (2010), when the annuity contract cannot influence the individual's decision for some exogenous reasons. However, with a population defined over a continuum of wealth, we are also able to identify the implications of moral hazard in terms of disparities in the population.

In addition to the risk-internalization failure, adverse selection generates a negative information externality on any individual presenting a lower risk profile than the healthiest individual. This externality limits the ability to invest in health. It mitigates or may even dominate, especially for people at the lower end of the risk distribution, the upward longevity distortion caused by moral hazard. It also exacerbates the effect of moral hazard on the longevity inequalities.

As for the public/collective system, we first assume that the individual receives an exogenous and constant benefit during the second period and pays a fixed contribution, actuarially fair at the population level, during the active period. This simple design is sufficient to reproduce the basic features of systems commonly observed in different countries and is frequently used in the literature. In a population of an infinite size, an individual cannot see the impact of his decision on the overall risk level : consequently, the risk-internalization failure is also present.[3]

The constant contribution across the population means that there is an actuarial subsidy from low-risk to high-risk individuals, making this system regressive due to the positive correlation between longevity and wealth. This feature goes counter to the perspective of Diamond (1977) who presents the double role of insurance and redistribution as a key peculiarity of Social Security. Furthermore, the wealth effect generated by the actuarial subsidy should aggravate inequalities in longevity, as mentioned by Davies and Kuhn (1992), but we find that the fact that the benefit is small in regard to the retirement needs, especially for wealthier people, mitigates this tendency.

The one-size-fits-all contract of this pension system conveniently copes with a

[3]Philipson and Becker (1998) suggest that the increase in life expectancy over the last decades may be partly and unexpectedly due to the post-war implementation of OAS in US, leading to further pressure on public budgets.

world where risk-related information on participants is costly to obtain and to use, in line with the adverse selection framework of the private market. Indeed, the assumption that a government or an employer has access to private information implies a prior investment in an informational system, at a cost that should be considered in the pension pricing, in order to keep both private and public frameworks comparable.

However, this simple system is not designed to maximize a given definition of welfare. Therefore, we propose a pension system relying on an incentive compatible self-selection mechanism. This system should do better in terms of welfare than a competitive insurance market because it faces a unique budget constraint rather than the obligation to charge a fair premium to everybody. In addition, the use of the contribution scale in the revelation mechanism involves the payment of an information rent that increases in risk and thus, in wealth. Accordingly, as in the simple public system, an actuarial subsidy is still present to exacerbate the disparities in longevity, though to a lower extent. In contrast with the private contract, the information rent mitigates the distortion in the benefit amount, resulting in a higher incentive to invest in health.

Compared to Davies and Kuhn (1992) and Philipson and Becker (1998), a model of endogenous risk implies risk heterogeneity when we include heterogeneity in wealth. This double heterogeneity not only opens the door to adverse selection, itself giving rise to moral hazard, but also draws attention to the redistributive properties of public and private systems over the dimensions of both wealth and longevity. Platoni (2010) also calculates the equilibrium in a market facing both moral hazard and adverse selection by assuming two levels of time preference. However, because retirement issues involve intertemporal wealth transfer and redistribution, we claim that a population heterogeneity defined in terms of wealth provides new insights on these questions.

In the next section, the model is developed without insurance to establish the links between wealth, lifestyle, longevity, and retirement funding. In Section 1.3, the private annuity market is analyzed, assuming first that the individual risk profile is observable, then that the insurers face the issue of adverse selection. The two public pension systems are analyzed in turn in Section 1.4, and the Section 1.5 concludes.

1.2 Endogenous longevity risk in a life cycle model

Life is divided into two periods. An individual is certain to live during his active period ($t = 1$) but death on retirement date may prevent him from living his retirement period ($t = 2$). At the beginning of the first period, he owns wealth W and makes relevant decisions to maximize the expected value of the discounted utility to be received over both periods. The resulting consumption $c_t \geq 0$ provides him with an utility over each period that is a continuously increasing and concave function $U(c_t)$ with $U(0) = 0$.

Revenue uncertainty is not a concern of this paper and W captures all earnings. It exogenously arises during the active life, and W is net of all taxes except those that may be raised to finance public or collective pension benefits. It is distributed in the population over the continuous range $[\underline{W}, \overline{W}]$ according to the cumulative distribution function $F(W)$, and it is the unique source of exogenous heterogeneity in the population. During the active period, wealth also decreases with x, the cost of the efforts made to promote one's good health. The choice of x corresponds to the choice of a specific lifestyle; it does not only involve direct financial expenses but also elements such as the opportunity cost of a lower salary from less dangerous professional activities, as in Cropper (1977), or foregone utility from restrictions on consumption (e.g. no smoking) or from unpleasant activities (e.g. exercise). It may also be associated to an investment in health.

In a two-period world, decisions about retirement planning, lifestyle, and consumption, are made during the active period, before receiving information about the actual date of death. In order to introduce the longevity risk, it is sufficient to consider that this information happens at the end of the active life, as the occurrence of one of the two possible outcomes. With probability $p \in (0,1)$ the individual learns that he is healthy and will live through the second period. Otherwise, he is told that he is in such poor health that he will die immediately, in which case the money previously saved is not consumed.[4] In order not to blur the focus on the longevity risk and to ease the comparison between each section, bequests do not bring any utility :[5] this assumption can be interpreted as a normalization of the preference for one dollar consumed over one dollar bequeathed.

In the health capital literature developed by Grossman (1972, 1998) and Ehrlich and Chuma (1990), an individual who dedicates more resources to his health is more likely to remain healthy and to live longer. This is modeled by allowing the

[4]The probability p may be interpreted as the ratio of the number of years lived during retirement over the number of years before retirement. For instance, if a 30-year old person retires at 65 with a maximum lifetime of 100, dying at age 93 means a probability of $80\% = \frac{93-65}{65-30}$.

[5]Although the existence and the importance of bequest in the economy is broadly recognized, there is no agreement on its motivation. Some argue that money is unintentionally left as a result of the uncertainty about the date of death, the required medical expenses and the available income (Hurd (1987, 1989), Dynan and al. (2004)). Others invoke a deliberate preference for intergenerational wealth transfers (Bernheim (1991), Gale and Scholz (1994)). Between both views, Skinner and Zeldes (2002) state that despite a concern for leaving assets to heirs, bequests materialize only if savings are overestimated, making redundant the use of both justifications.

probability to live the second period to depend on lifestyle : $p \equiv p(x)$ with $p'(x) > 0$, $p''(x) < 0$ and $p(\infty) \to 1$.

The financial risk is not central to the analysis, and the constant return on investment is normalized to zero. Given the cost of the lifestyle selected at the beginning of active life, the choice of a consumption plan (c_1, c_2) amounts to the choice of a retirement capital R invested in a bond and defined by

$$R = W - x - c_1. \tag{1.1}$$

People do not frequently change their lifestyle; lifestyle affects health only in the long run. Late in life, during retirement, an individual often has no other option than living with the consequences of past lifestyle decisions. Moreover, in this model, a lifestyle expense after retirement would have no impact. Thus it is assumed that x is decided and incurred during the first period only, at a known cost, but with an uncertain benefit in terms of longevity.[6]

If the individual survives his retirement date, he receives R by cashing the investment bond. He knows with certainty that he will die at the end of this second period so that it is optimal to spend this amount entirely as c_2,

$$R = c_2. \tag{1.2}$$

If death occurs at the end of active life, the second-period consumption is zero and the accumulated capital goes to the estate and generates no utility.

[6]In Davies and Kuhn (1992), the investment in health first appears in each period. The optimal second-period investment then enters in the resulting indirect second-period utility and is eliminated from the problem, recognizing that it cannot modify the observed survival probability.

1.2.1 Optimal private choices without insurance

Since the analysis focus on the lifestyle choice and, in the next sections, on the insurance mechanisms, we ease the development by setting the time preference rate equal to the investment return, that is to zero. The maximized lifetime utility is defined by the optimal savings and lifestyle choices,

$$V(W) = \max_{R,x} U(c_1) + p(x)\,U(c_2). \tag{1.3}$$

The problem is subject to $R \geq 0$, $x \geq 0$ as well as (1.1) and (1.2).

The interior solution for the retirement capital $R(W)$ satisfies

$$U'(c_1) = p(x)\,U'(c_2). \tag{1.4}$$

The first-period marginal utility equals the second-period expected marginal utility. Since $p(x) < 1$, the standard of living drops in case of survival, with $c_2 < c_1$. The higher the life expectancy captured by $p(x)$, the greater the incentive to save and the smoother the consumption path. Survival into the second period implies a higher longevity than initially anticipated and thus requires a downward adjustment in consumption. Death at retirement, with a zero ex-post probability, implies a shorter life than anticipated and, to the extent that bequests do not provide utility, the loss of a retirement capital built to the detriment of the first-period consumption.

The first-order condition

$$U'(c_1) = p'(x)\,U(c_2), \tag{1.5}$$

defines the optimal lifestyle $x(W)$, which involves a trade-off between the cost of a reduced consumption on the left-hand side and the benefit of a higher survival probability on the right-hand side. It can be shown that $\frac{dx(W)}{dW} > 0$: intuitively, a high level of wealth decreases the marginal utility of consumption and gives a relatively bigger weight to the survival benefit. The survival probability becomes $p(W) \equiv p(x(W))$, with $\frac{dp(W)}{dW} > 0$ from $p'(x) > 0$: wealthier people have higher survival probability while less well-off people prefer immediate consumption to future life.

1.3 Endogenous longevity risk with a private annuity market

In Constraint (1.1), the investment in a traditional bond leaves the longevity risk uninsured. An actuarial bond, also called an annuity, is an alternative investment that insures the longevity risk : the individual pays a premium to an insurance company prior his retirement and subsequently receives a guaranteed income as long as he is alive.[7] This section examines how an annuity contract sold in a competitive market influences individual choices.

While annuities are purchased before the realization of the longevity risk, toward the end of the active period, the lifestyle that affects life duration is adopted earlier in the active life : it may thus be influenced by the conditions proposed in the insurance market. Strictly speaking, the scope for moral hazard as a post-contract behavior that modifies risk is limited, since a change in behavior at older age may not significantly modify longevity.[8] However, if the concept of moral hazard is broaden

[7]We focus on the immediate income annuity, ignoring other forms of annuities used as saving vehicles and cashed-out before the reception of life-contingent income, such as those involving premiums paid throughout the active life or funds earning variable returns.

[8]As mentioned by Finkelstein and Poterba (2004), this characteristic of the annuity market is empirically interesting because the effects of asymmetric information can solely be attributed to

to any actions that impact the risk, then it captures the fact that the individual takes into account his future annuity contract when he selects his lifestyle, and thus defines his longevity risk, as in Davies and Kuhn (1992), Philipson and Becker (1998) and Platoni (2010).

In addition, adverse selection may be an issue to the extent that the insurer does not observe health accurately to predict longevity nor characteristics that impact health such as lifestyle and wealth. Two situations are then considered in turn : either the insurer can observe the risk to price the contract accordingly, or a menu of incentive compatible contracts is offered, leading to an equilibrium as in Rothschild and Stiglitz (1976).

The annuity contract is defined by a unit price and a quantity. The quantity is the amount "A" to be reimbursed in the second period in case the risk materializes (survival) ; otherwise, the insurer uses the money left by the dead to meet his commitment toward the surviving annuitants. To receive one dollar of this asset, an individual whose health is defined by x must pay the price $\pi(x) \in (0,1)$ in period one.[9] If A is insufficient to fulfill the retirement needs, it is completed by the purchase of an amount R of traditional bonds at the unit cost of 1.[10] The sum $A+R$ constitutes the new retirement capital so that (1.2) is replaced with

$$A + R = c_2. \tag{1.6}$$

The individual now saves

$$\pi(x) A + R = W - x - c_1 \tag{1.7}$$

adverse selection.

[9]In a competitive market, the premium rate $\pi(x)$ must be lower than the price of the bond since the annuity is less costly to supply.

[10]Some authors do not allow traditional bonds : for instance, Eckstein and al. (1985), Webb (2009) and Platoni (2010)).

during his active life.

These investment vehicles are perfect substitutes but at different costs. There is thus an incentive to sell an infinite quantity of the most expensive one and to purchase an infinite quantity of the other one, unless a constraint on R ensures a finite solution. Although a loan $R < 0$ allows a higher retirement income at a lower price, it leaves the individual indebted in case of early death, pushing the lender out of the market. This arbitrage opportunity is rule out by imposing

$$R \geq 0. \tag{1.8}$$

1.3.1 Perfect information

During the first period, the individual optimally chooses savings and lifestyle and purchases annuity insurance on a competitive market, before the realization of the longevity risk. Under perfect information, these three actions are deemed to occur simultaneously. The problem is similar to (1.3) but subject to the constraints (1.6), (1.7) and (1.8). The optimum expected lifetime utility is

$$\widetilde{V}(W) = \max_{R,x,A} U(c_1) + p(x)\,U(c_2) \tag{1.9}$$

where a tilde refers here and further below to the optimum with insurance under perfect information.

Solutions for A and R respectively require

$$\begin{aligned} \pi(x)\,U'(c_1) &= p(x)\,U'(c_2), & (1.10) \\ U'(c_1) &= p(x)\,U'(c_2) + \mu. & (1.11) \end{aligned}$$

Since $\pi(x) < 1$, the Lagrange multiplier μ associated with the constraint $R \geq 0$ is strictly positive so that

$$\widetilde{R}(W) = 0, \ \forall W. \tag{1.12}$$

Whenever an actuarial bond is strictly cheaper than a traditional bond, an individual prefers the complete annuitization of his retirement assets.[11] This result is in contrast with other types of insurance where an actuarially fair premium is a condition for complete coverage. This condition is unnecessary in the annuity model because there is no utility when the "good" outcome of the risk, death, materializes (no bequest motive).

If insurers are risk-neutral and can perfectly assess risks, each individual pays an actuarially fair premium equal to the present value of the survival probability

$$\pi(x) = p(x). \tag{1.13}$$

Condition (1.10) reduces to $U'(c_1) = U'(c_2)$ with a smooth consumption path, as in the absence of uncertainty. Moreover, the lower cost $\pi(x) < 1$ allows an amount of annuity $\widetilde{A}(W)$ higher than the capital $R(W)$ defined in Section 1.2.1, and thus, higher consumption during retirement.

Lastly, the optimal lifestyle $\widetilde{x}(W)$ verifies the condition

$$U'(c_1) + \pi'(x) AU'(c_1) = p'(x) U(c_2). \tag{1.14}$$

As in Section 1.2.1, it can be proven that the investment in health increases with the individual wealth, $\frac{d\widetilde{x}(W)}{dW} > 0$, so that the wealth inequality translates into longevity inequality.

Moreover, with $\pi'(x) > 0$, the annuity premium $\widetilde{\pi}(W) \equiv p(\widetilde{x}(W))$ also increases with wealth : the actuarially fair pricing of an endogenous risk means that the premium is also endogenous. However, since it can be shown that $\frac{d\widetilde{A}(W)}{dW} > 0$, this

[11] This generalisation of the Yaari (1965) result is in line with the subsequent literature, such as Davidoff, Brown and Diamond (2005), Mitchell and al. (1999), Brown (2001).

higher price does not prevent annuity insurance to be a normal good, as it fulfills the need to smooth consumption.

As in the previous section, Condition (1.14) indicates that the optimal lifestyle choice equalizes the marginal cost of reducing consumption (left-hand side) with the benefit of a higher survival probability (right-hand side). However, compared with (1.5), the term $\pi'(x)\,AU'(c_1)$ adds to the cost of a reduced consumption by internalizing the effects of the lifestyle choice on the annuity premium. This internalization term was first identified by Davies and Kuhn (1992). According to Philipson and Becker (1998), its absence in public or collective regimes underlies the superiority of private insurance over public insurance. It will be shown below that it is also absent with private insurance under adverse selection.

1.3.2 Asymmetric information : adverse selection leading to moral hazard

A healthy individual with a high survival probability is a high-risk annuitant and is more expensive to insure than a less healthy individual. By hiding his actual health status, this high-risk individual takes advantage of an insurer that does not observe the risk profile of his customers. In this situation, Rothschild and Stiglitz (1976) define an equilibrium as a set of contracts that do not generate losses and where positive profits cannot be made by launching alternative contracts. A competitive insurance market results in a separating equilibrium with price and quantity discrimination, where each customer pays an actuarially fair premium in exchange of a coverage that maximizes his utility, subject to an incentive compatibility constraint. This constraint restricts the set of contracts offered by the insurer, so that the selected contract is unattractive to any other type of individual. A pooling contract would involve subsidies between customers; it would be loss-making and not available in the market, because it would only retain the high-risk customers, the low-risk customers being attracted by a cheaper, yet profitable, contract.[12]

The adverse selection problem arises here because, in addition to the survival probability, the lifestyle, the retirement capital and the underlying level of wealth are all assumed to be unobserved.[13] Furthermore, we will see below that the endogenous nature of the risk potentially adds a moral hazard dimension to the problem.[14]

The problem unfolds in two steps, both taking place during the first period. As a first step, an individual of wealth W chooses lifestyle $x \geq 0$ and savings $R \geq 0$, taking into account the second step, the purchase of an annuity. These variables remain hidden to the insurer in the second step, where he offers a menu of annuity contracts that incite the customer to reveal his true type x by choosing the contract designed for his type; this will lead to a separating equilibrium.

The solution is established by backward induction, starting with the insurer problem. To an individual with wealth $W \in [\underline{W}, \overline{W}]$ who previously chose x and R, the insurer offers a contract defined by the price $\pi(x)$ and the quantity $A(x)$. While $\pi(x)$ satisfies (1.13), $A(x)$ maximizes the lifetime value of the individual, subject to the condition that any other individual with wealth $\check{W} \neq W$ prefers the contract

[12]In Wilson (1977), a pooling equilibrium occurs if insurers are aware that their actions will be taken into account by competitors.

[13]Bond and Crocker (1991) show that first-best allocation with full insurance is achievable if the consumption of products correlated with the level of risk can be used as a signal. Finkelstein and Poterba (2006) note that variables such as wealth and savings, although they may be observable, are rarely used by annuity market providers, calling this fact "the puzzle of unexploited information".

[14]Platoni (2010) deals with a similar problem for two individuals defined by their time preference. In contrast, the risks are exogenous in the annuity market of Eckstein, Eichenbaum and Peled (1985) and Eichenbaum and Peled (1987).

designed for his lifestyle $\check{x}$ to the contract designed for the type x. Formally,

$$V(W,x,R)=\max_{A(x)}U\left(W-x-\pi\left(x\right)A\left(x\right)-R\right)+p\left(x\right)U\left(A\left(x\right)+R\right), \tag{1.15}$$

subject to the incentive compatibility constraint

$$\begin{aligned} & U\left(\check{W}-\check{x}-\pi\left(\check{x}\right)A\left(\check{x}\right)-\check{R}\right)+p\left(\check{x}\right)U\left(A\left(\check{x}\right)+\check{R}\right) \\ \geq\ & U\left(\check{W}-\check{x}-\pi\left(x\right)A\left(x\right)-\check{R}\right)+p\left(\check{x}\right)U\left(A\left(x\right)+\check{R}\right). \end{aligned}$$

Since there is a continuum of types, the number of constraints is infinite. To ensure that all these constraints are met,

$$\check{x}=\arg\max_{x}U\left(\check{W}-\check{x}-\pi\left(x\right)A\left(x\right)-\check{R}\right)+p\left(\check{x}\right)U\left(A\left(x\right)+\check{R}\right) \tag{1.16}$$

must be solved with the condition

$$U'\left(\check{c}_1\right)\pi'\left(x\right)A\left(x\right)=\left[-\pi\left(x\right)U'\left(\check{c}_1\right)+p\left(\check{x}\right)U'\left(\check{c}_2\right)\right]A'\left(x\right). \tag{1.17}$$

This constraint captures the trade-off of an individual with lifestyle $\check{x}$ who considers a deviation consisting in purchasing the contract of a marginally less risky individual $x=\check{x}-dx$.[15] Multiplying both sides by $dx>0$, the left-hand side gives the utility cost, for the individual $\check{x}$, of paying his marginally higher premium $\pi\left(\check{x}\right)=\pi\left(x\right)+\pi'\left(x\right)dx$. This individual is indifferent between his own contract and the contract of the person x if the utility cost is compensated, on the right-hand side, by the gain in utility from the marginal change $A'\left(x\right)dx$ in the quantity.

Because U', π' and A on the left-hand side of (1.17) are all positive, $A'\left(x\right)$ must have the sign of the expression between square brackets on the right-hand side.

[15]The incentive constraint binds only when $\check{x}>x$. For $\check{x}<x$, the first-order condition resulting from (1.16) is negative, meaning that cheating is value-destructive.

This expression is the first-order condition of the individual $\check{x}$ for an unconstrained quantity $A(x)$; since $A(x)$ is constrained, it must be chosen on the rising part of the objective function, implying

$$A'(x) > 0. \tag{1.18}$$

The above reasoning applies to marginal deviations, but it is true for any pair $(x, \check{x})$, $x < \check{x} \leq x^+$, where x^+ is the healthiest lifestyle chosen in the population. Thus the optimal contracts are such that the amount of coverage is rising with risk and is determined by the coverage of all riskier individuals; for instance, with x^- defining the least risky type, $A(x^-)$ would be lower if $A(x)$ was lower, $x > x^-$. This reasoning also means that the lower the risk (*i.e.* the lower x), the bigger the downward distortion in the annuity amount.

Since $x = \check{x}$ must be the solution to (1.16), the first-order condition requires that[16]

$$U'(c_1)\,\pi'(x)\,A(x) = \left[-\pi(x)\,U'(c_1) + p(x)\,U'(c_2)\right]A'(x), \;\forall\, x \leq x^+. \tag{1.19}$$

Because the expression between square brakets is positive, the quantity $A(x)$ is lower than the unconstrained level.

Equation (1.19) is a first-order differential equation in x that determines the path of $A(x)$, and its solution requires a boundary condition. Since the high-risk individual is immune to imitation the optimum contract needs not impose any distorsion upon that individual; on the contrary a negative distortion in his coverage would negatively affect all other individuals. Therefore, the welfare of each individual $x < x^+$ is maximized, given the set of incentive compatibility constraint, if

[16] The second-order condition is also verified.

$A(x^+)$ solves the unconstrained problem (1.15) with the condition

$$-\pi(x^+)U'(c_1^+) + p(x^+)U'(c_2^+) = 0. \tag{1.20}$$

This boundary condition allows the insurer to select the optimal path of $A(x)$ when he knows the actual level of x^+. It then means that he must also solve the first step of the problem as would do the individual : this is possible because the population wealth distribution as well as people's preferences and decision processes are public information, although the characteristics of a specific individual remain hidden to an insurer. Consequently, replacing $\widehat{x}(W)$, chosen below by individuals $W \in [\underline{W}, \overline{W}]$, in the contract parameters $\pi(x)$ and $A(x)$ leads to the actual premium rates $\widehat{\pi}(W) \equiv \pi(\widehat{x}(W))$ and to the quantities $\widehat{A}(W) \equiv A(\widehat{x}(W))$. The hat refers to the equilibrium with private insurance under asymmetric information.

In the first step, an individual of wealth $W \in [\underline{W}, \overline{W}]$ optimizes lifestyle expenditures and retirement capital to get a lifetime utility of

$$\begin{aligned} \widehat{V}(W) &= \max_{x,R} U(W - x - \pi(x)A(x) - R) + p(x)U(A(x) + R) \quad (1.21) \\ &\quad \text{subject to } R \geq 0;\ x \geq 0. \end{aligned}$$

The problem is further subject to constraints (1.19), (1.20), and (1.13) as the individual knows that they define the contract parameters $\pi(x)$ and $A(x)$ associated with his lifestyle decision x.

The necessary condition for the optimal lifestyle $\widehat{x}(W)$ is

$$-U'(c_1)(1 + \pi'(x)A(x) + \pi(x)A'(x)) + p(x)U'(c_2)A'(x) + p'(x)U(c_2) = 0, \tag{1.22}$$

which, upon constraint (1.19) at equilibrium, reduces to

$$U'(c_1) = p'(x)U(c_2). \tag{1.23}$$

As in previous sections, it can be shown that lifestyle expenditures strictly increase with wealth - $\frac{d\widehat{x}(W)}{dW} > 0$ - so that they range from $x^- \equiv \widehat{x}(\underline{W})$ to $x^+ \equiv \widehat{x}(\overline{W})$. The survival probability $\widehat{p}(W) \equiv p(\widehat{x}(W))$, the fair premium $\widehat{\pi}(W) \equiv \pi(\widehat{x}(W))$ and the annuity amount $\widehat{A}(W) \equiv A(\widehat{x}(W))$ are also increasing in W : a wealthy individual, being a higher risk, incurs a higher premium and receives a higher annuity coverage. The wealthiest individual receives complete coverage $\widehat{A}(\overline{W}) \equiv A(x^+)$, while others are offered less coverage than they desire.

An effect of asymmetric information on the lifestyle decision is assessed by comparing Condition (1.23) with the condition (1.14) that applies under perfect information. The term $\pi'(x) AU'(c_1)$ that increases the cost of investing in health on the left-hand side of (1.14) does not appear in (1.23) because the revelation mechanism eliminates the signal by which individuals internalize the effects of their lifestyle choice. The result is an upward distortion in health and longevity for all individuals. This form of moral hazard, that we call the risk-internalization failure, is also identified by Philipson and Becker (1998) when the coverage is provided by a public system, and more generally by Davies and Kuhn (1992) when a private insurer cannot observe the individual's investment in health. In this section, it is a consequence of adverse selection.

The internalization term $\pi'(x) AU'(c_1)$ is the product of $\pi'(x)$, the effect of the lifestyle on the annuity premium, by the marginal disutility of the premium $AU'(c_1)$, an increasing function of wealth.[17] Consequently, the upward distortion in health is more pronounced at high levels of wealth : the risk-internalization failure amplifies the inequalities in longevity observed under perfect information.

[17] This result is ensured when the relative risk aversion is lower than the unity.

The amount $\widehat{R}(W)$ of savings invested in traditional bonds is determined by

$$U'(c_1) = p(x)\, U'(c_2) + \mu, \tag{1.24}$$

where $\mu \geq 0$ is the Lagrange multiplier for the constraint $R \geq 0$. First, $\widehat{R}(\overline{W})$ is null because the annuity amount $\widehat{A}(\overline{W})$ completely fulfills the retirement needs, under perfect information. For $W < \overline{W}$, it is possible to have $\widehat{R}(W) > 0$ due to the information externality that constrains $\widehat{A}(W)$, though its purchase is limited by its high cost $1 > \pi(W)$, so that the total retirement income $\widehat{A}(W) + \widehat{R}(W)$ remains suboptimal. It is also possible to have $\widehat{R}(W) = 0$ for $W < \overline{W}$, which is more likely to happen at the ends of the wealth distribution because two effects are at play. On the one side, the lower-wealth individuals incur an important negative distortion in their annuity coverage but, having a lower survival probability, their retirement needs are limited. Purchasing additional saving bonds would be unattractive considering that the gap between the price 1 of a bond and the fair price $\pi(W)$ of the annuity is at its widest. On the other side, the downward distortion in the quantity of annuity is low for wealthy individuals, and the need to purchase saving bonds at a slightly higher price than the annuity may also be limited. Indeed, when savings are positive in numerical simulations, the function $\widehat{R}(W)$ shows an inverted U-shape.

Consequently, in addition to the risk-internalization failure discussed above and associated with moral hazard, adverse selection influences the choice of lifestyle through the second channel of information externality. In fact, compared to the situation of perfect information, this externality has two effects. First, since the retirement income $\widehat{A}(W) + \widehat{R}(W)$ is lower than desired, whether $\widehat{R}(W) > 0$ or $\widehat{R}(W) = 0$, it becomes less interesting to survive, and the individual is discouraged from investing in health : this is the incentive effect. Second, when $\widehat{R}(W) > 0$, the weighted cost of transferring wealth to the second period is more expensive than the fair annuity premium, which creates a negative wealth effect from $\frac{d\widehat{x}(W)}{dW} > 0$. By limiting the longevity for people with $W < \overline{W}$, these two effects counteract the upward effect of the risk-internalization failure. As this reduction in longevity follows the extent of the information externality, it decreases with wealth.

It means that wealthy individuals always overspend in health promoting lifestyle because the information externality has little impacts on them and their behavior is mainly affected by the risk-internalization failure; they thus constitute a higher longevity risk than would be socially optimal under perfect information. As one goes down the wealth ladder, the inducement to overspend is increasingly met by the opposite signal caused by the information externality. As a result, low-wealth individuals will underspend and experience lower longevity than would be desirable under full information if the information externality effect dominates; this is more likely to happen if the individual's wealth is far from $\overline{W}$. It is also possible that low-wealth individuals overspend due to the domination of the moral hazard effect, which is related to the concavity of $\pi(x) = p(x)$ (the impact of x on the annuity premium), although their upward distortion in longevity would remain lower than that of wealthier individuals.

Figures 1.1 and 1.2 illustrate how the relationship between wealth and lifestyle expenditures may be affected by the risk-internalization failure (the difference between the lines "Moral hazard only" and "Perfect information") and the two effects related to the externality of information (the difference between the lines "Adverse selection + Moral hazard" and "Moral hazard only") in a competitive annuity market. The presence of the two figures illustrates the ambiguity that results from the combination of both failures for an individual with $W < \overline{W}$. However, because the downward effect of the information externality decreases as wealth increases while the upward effect of moral hazard increases with wealth, it clearly appears that the inequalities in longevity are more important in a private market facing adverse selection where both failures are combined than under an insurance market with no imperfection.

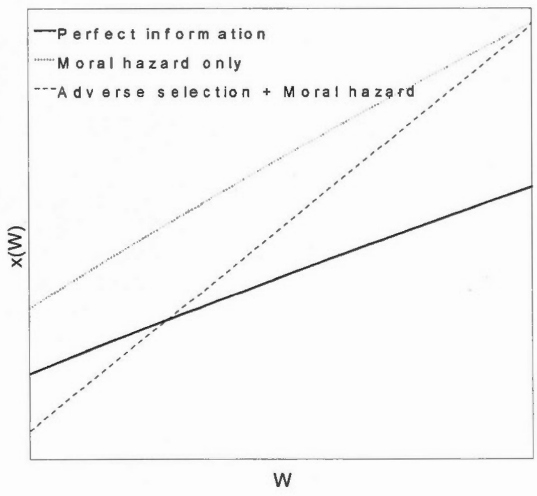

Fig. 1.1 – Investment in longevity in function of wealth : case where $\widehat{x}(W) \gtrless \widetilde{x}(W)$ $\forall$ $W < \overline{W}$

Philipson and Becker (1998) claim that public annuity systems give individuals incentives to overspend in longevity, while implying that private annuity insurance does not suffer from this drawback; we saw that this is only the case when information is perfect. The next section will show how the risk-internalization failure affects public insurance. It will also be seen that public insurance may use approaches to deal with adverse selection that differ from the private market mechanism.

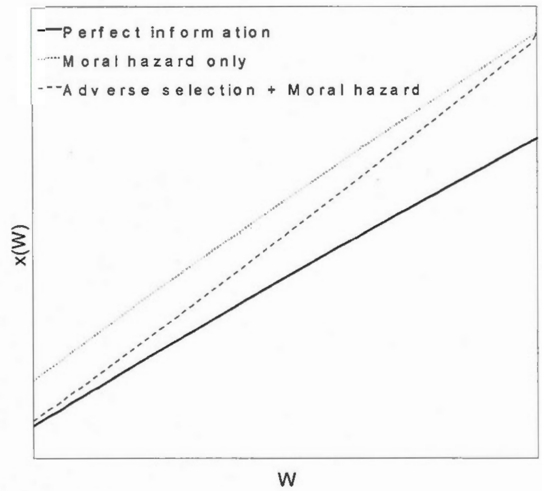

Fig. 1.2 – Investment in longevity in function of wealth : case where $\widehat{x}(W) > \widetilde{x}(W)$ $\forall$ $W < \overline{W}$

1.4 Public insurance

An Old-Age Security (OAS) program can be seen as a social contract that ensures an income for older people. Retirees may also receive a pension from the defined-benefit (DB) plan operated by their employer or their union. In both cases, the benefits must be funded by the active population through general taxation, direct contributions, or compensated by a lower salary in the case of a DB plan. To simplify the text, the term "public system" encompasses OAS and DB plan, to the extent that they both share the feature of mandatory participation that permits the imposition of the contract conditions.

In line with the previous section, it is assumed below that an individual knows and takes into account the characteristics of the public system when making saving and lifestyle decisions.[18] Because this paper studies the impact of each type of insurance on the longevity risk, the public system is kept in isolation from the private market even if both in reality may coexist.

The rest of this section discusses two alternative models of public insurance. As in the above analysis of the private market, the principal (a government or an employer) that designs the contract has no access to individual information on health status, lifestyle or wealth. However, the compulsory participation implies that nobody can avoid a system that would be disadvantageous to him. In consequence, subsidies are possible between participants, as long as the budget remains balanced at the population level.

The first model captures the unsophisticated design of a pension scheme frequently analyzed in the literature, and that may be observed in some countries. With the same benefit and contribution for everybody with no regard to the individual's risk or wealth, the issue of adverse selection is avoided.[19] However, such systems give rise to discrepancies between benefits and the needs of retirees : poorer people may become better-off at retirement than during active life since the future benefits are subject to a borrowing constraint, while middle and high earners are incompletely covered against the longevity risk and must fill the gap with savings. The second model proposes a more sophisticated version of public insurance where welfare is maximized by the choice of a benefit and contribution schedule customized

[18] Initially, newly introduced programs constituted a direct transfer to older people without any financial counterpart from them. To the extent that they came as a "surprise", they did not significantly affect life cycle decisions. We consider a steady-state situation where individuals know their institutional environment and consider it permanent.

[19] In Eckstein, Eichenbaum and Peled (1985), this argument justifies the welfare gain generated by the introduction of public pensions when adverse selection is present in the private market.

to individual characteristics, forcing the principal to address adverse selection.

1.4.1 Exogenous contracts with no selection

In this model, the exogenous benefit B paid during the second period is constant across individuals. To highlight the failure of this benefit to meet the retirees' needs, the model allows for personal savings R. The second-period constraint, to be contrasted with the private insurance constraint (1.6), is

$$R + B = c_2. \tag{1.25}$$

This benefit is funded by a contribution T paid by each individual. This amount is not related to his risk, and the first-period constraint (1.7) is replaced with

$$R = W - T - x - c_1. \tag{1.26}$$

The liquidity constraint $R \geq 0$ may also bind as it is usually forbidden to borrow against future governmental pensions, and the associated Lagrange multiplier μ is non-negative. As a last constraint, a self-funded program requires the financial balance of the system so that the contribution is actuarially fair at the population level

$$T = B \times E_W \left[p\left(W, B\right)\right], \tag{1.27}$$

where $p\left(W, B\right) \equiv p\left(x\left(W, B\right)\right)$. The individual's choice of $R\left(W, B\right)$ and $x\left(W, B\right)$ solve a problem similar to (1.3), except that it is now subject to constraints (1.25) and (1.26).

The optimal savings derive from the first-order condition (1.24) as in a private market with adverse selection. Since $\frac{dR(W,B)}{dB} < 0$,[20] the corner solution $R\left(W, B\right) = 0$

[20]It is possible to have $\frac{dR(W,B)}{dB} > 0$ if the crowd-out effect of public pensions on private savings

may arise if B is high enough compared to W, and this is more likely for less wealthy people because $\frac{dR(W,B)}{dW} \geq 0$. In this case, the retirement needs of the poorer people are more than fulfilled by the promised pension.

The lifestyle $x(W, B)$ of a single person has a negligible impact on the collective contribution T. Consequently, unlike the private market under perfect information, a fixed contribution to a public system prevents the internalization of the effect of the lifestyle choice, as pointed out by Davies and Kuhn (1992) and Philipson and Becker (1998). Therefore, the choice of $x(W, B)$ results from the same condition (1.23) as in a private market with adverse selection. As previously, it is possible to prove that $\frac{dx(W,B)}{dW} > 0$ and $\frac{dp(W,B)}{dW} > 0$, whether $R(W, B) = 0$ or $R(W, B) > 0$: wealthier people still adopt a healthier lifestyle.

From $\frac{dp(W,B)}{dW} > 0$, we have $p(\underline{W}, B) B < T < p(\overline{W}, B) B$: a less healthy individual pays more than his actuarially fair premium, and *vice versa* for a healthier person. It means that the former subsidizes the latter, and the positive correlation between wealth and health makes this subsidy regressive. However, the subsidy is of low importance for wealthy people because it applies to a small portion of their retirement income (B is low compared to $R(W, B) + B$), but it has a substantial impact on the poorest subsidizing people because their retirement needs are mainly met by the public system. While Diamond (1977) mentions the double role of in-

is countered by the incentive to save more due to the positive effect of the pension on the survival probability, as found below. However, this result needs extreme parameter values to be simulated, and it is not supported by empirical evidence : Feldstein (1974, 1996) obtains a substitution effect of 60% from time-series analysis, the effect ranges from 0 to -100% in different cross-section analysis - Diamond and Hausman (1984), Bernheim (1987), Gullason, Kolluri, and Panik (1993), Attanasio and Rohwedder (2003), *etc.*), and Hurd, Michaud and Rohwedder (2012) calculate a savings displacement of 0.22 by comparing 12 countries.

surance and redistribution as a peculiarity of the Social Security, a system with no risk-rating, though it is frequent in the real life, clearly fails in meeting the second objective. The low-risk people thus incur an externality that we call the actuarial externality, which is generated by risky people who make the contribution higher by their sole existence in the population. [21]

To compare the effects, on the lifestyle choice, of the public system and the private market when both face imperfect information, we consider the situation where everybody must invest in saving bonds ($\widehat{R}(W) > 0$ and $R(W,B) > 0$, $\forall W$). Because the risk-internalization failure is present in both systems, the differences in lifestyle will only be related to the difference in the design of each system. In Figure 1.3, it means that the jump from the line "Moral hazard only" to the line "Adverse selection + Moral hazard" is compared with the jump from the same "Moral hazard only" line to the "OAS" line.

When personal savings is positive, the retirement incomes $R(W,B) + B$ of the public system and $\widehat{R}(W) + \widehat{A}(W)$ of the private market are determined by the same condition (1.24) : the incentive effect is then the same in both systems. Therefore, the difference in lifestyle is only due to the different costs of financing these incomes, meaning that $T + R(W,B)$ and $\widehat{\pi}(W)\widehat{A}(W) + \widehat{R}(W)$ generate different wealth effect. In fact, the private market is likely to be less expensive for everybody : for example, the weight of personal savings, which is the most expensive mechanism, is low for wealthiest and less well-off people, and most of their pension is actuarially priced. In the public system, wealthiest people heavily rely on personal savings, but

[21] An externality generated by high-risk on low-risk individuals is then common to both public and private systems, with the difference that the information externality resulting from the incentive mechanism of the private market does not make high-risk people better off, while they slightly benefit from the actuarial externality in the public system.

they benefit from the subsidy on a small part of their income. Still in the public system, less well-off people tend to have almost no savings, but the impact of the actuarial externality is strong. Consequently, this form of public system generate less investment in longevity than the private market when information is imperfect, but the disparities in longevity remain relatively the same : this explains that the lines "Adverse selection + Moral hazard" and "OAS" are relatively parallel in Figure 1.3. This also means that both systems increase disparities relative to the perfect information benchmark.[22]

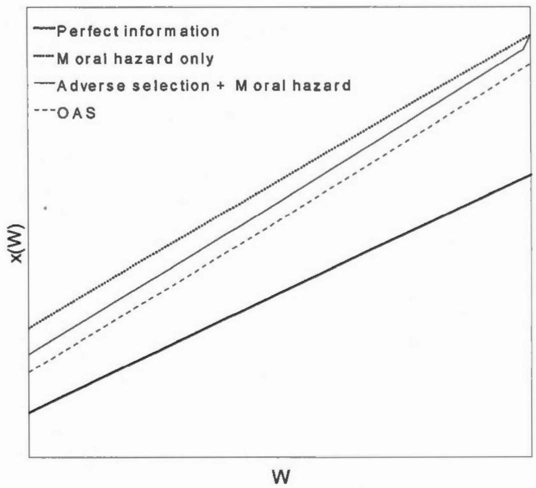

Fig. 1.3 – Investment in longevity in function of wealth : OAS is the exogenous contract where $R(W,B) > 0$, $\forall W$, and $\widehat{R}(W) > 0$, $\forall W < \overline{W}$

In a context where the endogenous risk cannot be internalized, Davies and Kuhn

[22]If $R(W,B) = 0$ for poorest people with $W < W_0$, the function $x(W,B)$ kinks at W_0 with a flatter slope before this point, due to the incentive effect created by a higher retirement income than required. The difference in longevity between poor and rich people is thus reduced compared to the situation of $R(W,B) > 0$, $\forall W$.

(1992) also mention that the difference in longevity is more important with a populational fair contribution than with an individual fair contribution. However, because the wealthier people see the positive impact of the actuarial externality mitigated by the too low benefit provided by the public system, the difference in longevity should not be as important as these authors predict. For their part, Philipson and Becker (1998) explain the non-ambiguous increase in life expectancy created by the introduction of the OAS in the US (which lead to an imbalanced budget) not only by the absence of risk internalization, but also by life contingent payments that are more advantageous than the traditional savings that they crowded out, in line with B showing a higher return than R from $\frac{T}{B} < 1$.

1.4.2 An optimum public mechanism facing adverse selection

The above simple public system is not explicitely designed to maximize welfare. One of its drawback is its failure to provide adequate retirement income to some individuals. A public system with risk-related contributions and benefits should do better in terms of welfare, but its design requires information on the wealth and/or health of each individual. As explained in the introduction of this section, a government or an employer may not have access to more information than a private insurer, and a mechanism revealing the necessary information must then be implemented. This mechanism is developed below and its impact on the longevity of the population is assessed.

This pension mechanism is defined by a benefit $B(W)$ received during retirement and a contribution $T(W)$ paid during active life. If an individual with wealth $W \in [\underline{W}, \overline{W}]$ is allocated the mechanism dedicated to an individual with wealth $\check{W} \neq W$, his lifetime utility will be

$$\begin{aligned} u\left(W,\check{W}\right) &= U\left(c_1\right)+p\left(x\left(W\right)\right)U\left(c_2\right), \\ \text{where } c_1 &= W-x\left(W\right)-T\left(\check{W}\right)-R\left(W\right), \\ c_2 &= B\left(\check{W}\right)+R\left(W\right). \end{aligned} \tag{1.28}$$

While competition ensures that a private insurer maximizes the welfare of each individual separately (subject to the incentive and budget constraints), the sponsor of a public pension plan would like to maximize the population welfare by the choice of $B\left(W\right)$ and $T\left(W\right)$ for $W \in \left[\underline{W},\overline{W}\right]$ in

$$\max_{T(W),B(W)} \int_{\underline{W}}^{\overline{W}} u\left(W,W\right) f\left(W\right) dW, \tag{1.29}$$

where $f\left(W\right)$ is a continuous density function for the population wealth.

The wealth and the lifestyle that determine the risk of each person being hidden to the principal, the mechanism must ensure that it is advantageous for everyone to reveal his own characteristics. For this purpose, the incentive compatibility constraint must meet the following first-order condition at equilibrium :

$$\frac{\partial u\left(W,W\right)}{\partial\check{W}} = -U'\left(c_1\right)T'\left(W\right)+p\left(x\left(W\right)\right)U'\left(c_2\right)B'\left(W\right)=0. \tag{1.30}$$

In addition, $B'\left(W\right)>0$ ensures that the second-order condition of this constraint is always met.

The plan must also be self-funded. This means that the pricing is actuarially fair at the whole population level, implying the following budget constraint

$$\int_{\underline{W}}^{\overline{W}} T\left(W\right) f\left(W\right) dW = \int_{\underline{W}}^{\overline{W}} p\left(x\left(W\right)\right) B\left(W\right) f\left(W\right) dW. \tag{1.31}$$

In the absence of agency issue, the private and the public system would give the same allocation : as in Section 1.3.1, $B\left(W\right)$ would completely cover the longevity risk, and $T(W)$ would equal $B(W)\,p(x(W))$, $\forall W$. Under adverse selection, because the private insurer charges each individual his own fair premium, he imposes, in fact, an infinite number of budget constraints. In contrast, the sponsor of a public system faces a unique budget constraint. Due to this difference, it will be seen below that the incentive constraint impacts the resulting allocation differently, although it is set at the individual level in both systems. Besides, the lower number of constraints means that the public system should do better in terms of the population welfare, though nothing guarantees that it would make everybody better-off. Indeed, the mandatory participation clause allows the public system to impose subsidies between participants. A competitive insurer doing the same thing would lose the subsidizing customers to the competitors and would become unprofitable.

In the way of the private insurer in Section 1.3.2, the sponsor of the public plan solves Problem (1.29), subject to the constraints (1.30) and (1.31), while taking into account the fact that people previously chose their optimal lifestyle $\acute{x}(W)$ and savings $\acute{R}(W)$. On their side, the individuals are aware of the mechanism that will be offered to them when they make their decisions. If $B(W)$ is not sufficient to fulfill the retirement needs, they determine the savings $\acute{R}(W)$ according to condition (1.24). However, because the contribution $T(W)$ is not directly related to the risk, the first-order condition (1.23) of the private market under adverse selection is used to determine $\acute{x}(W)$, implying that the risk-internalization failure is also present in this incentive compatible public pension plan.

We must characterize $B(W)$ and $T(W)$ sufficiently to be able to assess their impact on the lifestyle choice. For this purpose, Problem (1.29), with constraints (1.30) and (1.31), consists in an optimal taxation problem that is amenable to solution by optimal control. The differential equations generated by the problem do not appear to be solvable explicitely, nor do they generate obvious exploitable properties.

To solve a similar optimal taxation problem, Salanié (1994) adopts, in his Section 3.2.2, a quasi-linear form for the individual utility. We follow the same approach, using a lifetime utility quasi-linear in the contribution $T(W)$; other basic properties of the lifetime utility are kept. The instantaneous utility function becomes specific to each period : the concave function $U(.)$ still applies for the second period, but the first-period utility is now $U(c_1) \equiv z \times c_1$, where z is a calibration factor that ensures comparable weights on each period. Since the factor z also stands for the marginal utility of paying a contribution, it must be a decreasing function of some wealth definition w, so that $z \equiv z(w)$, $z'(w) < 0$.[23] In fact, $z(w)$ reproduces $U'(c_1)$ in a world where an utility function is an ordinal measure rather than a cardinal one. Despite the quasi-linear form, $z(w)$ preserves a risk aversion for the first-period consumption. In addition, to pin down the impact of both contract parameters on the lifestyle choice, the wealth w must be defined as $w \equiv W - x(W)$,[24] and the lifetime utility is rewritten as

$$z(W-x)(W-x-T-R) + p(x)U(B+R).$$

Accordingly, the first-order condition (1.23) for $\acute{x}(W)$ becomes

$$z(W-x) + z'(W-x)(W-x-T-R) = p'(x)U(c_2). \qquad (1.32)$$

In (1.23), the left-hand side $U'(c_1)$ captures both the marginal disutility of paying x

[23]For instance, if $T(W) = p(x(W))B(W)$ as in the private market, the optimal $B(W)$ would be determined by $z(w) = U'(c_2)$ as an increasing function of w, and $R(W)$ would still be zero. Also, to ensure an increasing and concave lifetime value with regard to the wealth, $z(w)$ must verify $\frac{d}{dw}wz(w) > 0$ and $\frac{d^2}{dw^2}wz(w) < 0$.

[24]Naturally, the result $\acute{x}'(W) > 0$ and the other usual properties of the lifetime value require that $1 - \acute{x}'(W) > 0$, *i.e.* the health investment must increase less rapidly than the wealth.

and the wealth effect of the cost of c_2 (a higher cost decreases c_1 and thus increases the marginal cost of the health investment) : these components are respectively captured by $z(W-x)$ and $z'(W-x)(W-x-T-R)$ in (1.32).

With the above transformation, Problem (1.29) becomes :

$$\max_{T(W),B(W)} \int_{\underline{W}}^{\overline{W}} [z(W-x(W))(W-x(W)-T(W)-R(W)) \tag{1.33}$$
$$+p(x(W))U(R(W)+B(W))]f(W)dW,$$

subject to the budget constraint (1.31) and to the incentive compatibility constraint

$$\begin{aligned} z(W-x(W))T'(W) &= p(x(W))U'(R(W)+B(W))B'(W), \text{ or} \quad (1.34) \\ T'(W) &= Q(W)U'(R(W)+B(W))B'(W), \end{aligned}$$

where $Q(W) \equiv q(W,x(W)) \equiv \frac{p(x(W))}{z(W-x(W))}$ is an increasing function of W.

Integrating (1.34) isolates the choice variable $T(W)$, which will allow the substitution of the incentive constraint into the objective function :

$$T(W) = K_0 + \int_{\underline{W}}^{W} Q(\omega)U'(B(\omega)+R(\omega))B'(\omega)d\omega, \tag{1.35}$$

where K_0 is a constant of integration. Noting that the first-order condition (1.24) for the individual's problem becomes

$$FOCR(W) = -1 + \frac{p(x(W))}{z(W-x(W))}U'(B(W)+R(W)) = 0$$

whenever $\acute{R}(W) > 0$, expression (1.35) becomes[25]

$$T(W) = K_0 + \int_{\underline{W}}^{W} [Q(\omega)U'(B(\omega)+R(\omega))B'(\omega) + FOCR(\omega)R'(\omega)]d\omega. \tag{1.36}$$

[25]Note that if $R(\omega) = 0$, there is no need to add $FOCR(\omega)$ in the integrand.

Integration by part and few manipulations yield

$$T(W) = K + Q(W)U(c_2) - R(W) - \int_{\underline{W}}^{W} Q'(\omega)U(B(\omega)+R(\omega))\,d\omega, \qquad (1.37)$$

where K is the sum of K_0 and the constant resulting from the integration by part. The integral on the right-hand side is zero for the least wealthy person; for $\omega > \underline{W}$, it is positive and increasing in wealth. It enters negatively in $T(W)$ and it can be interpreted as the informational rent paid to wealthier (and riskier) people to incite them to reveal their characteristics.

The constant K is now calculated by replacing (1.37) in the budget constraint (1.31)

$$\begin{aligned}\int_{\underline{W}}^{\overline{W}} p(x(W))B(W)f(W)\,dW &= K + \int_{\underline{W}}^{\overline{W}} [Q(W)U(c_2) - R(W)]f(W)\,dW \\ &\quad - \int_{\underline{W}}^{\overline{W}}\int_{\underline{W}}^{W} Q'(\omega)U(c_2)\,d\omega f(W)\,dW.\end{aligned}$$

An integration by part eliminates the double integral; then a few transformations lead to

$$\begin{aligned}K &= \int_{\underline{W}}^{\overline{W}} p(x(W))B(W)f(W)\,dW + \int_{\underline{W}}^{\overline{W}} R(W)f(W)\,dW \qquad (1.38)\\ &\quad + \int_{\underline{W}}^{\overline{W}} [Q'(W)(1-F(W)) - Q(W)f(W)]U(c_2(W))\,dW.\end{aligned}$$

Using (1.37), it is now possible to write Problem (1.33) (subject to (1.31) and (1.34)) as an unconstrained problem with $B(W)$ as the unique choice variable :

$$\begin{aligned}\max_{B(W)} \int_{\underline{W}}^{\overline{W}} &\left[W - x(W) + \int_{\underline{W}}^{W} Q'(\omega)U(c_2(\omega))\,d\omega\right] z(W - x(W))f(W)\,dW \\ &-K\int_{\underline{W}}^{\overline{W}} z(W - x(W))f(W)\,dW.\end{aligned}$$

Let $M(W) = \int_{W}^{\overline{W}} z(\omega - x(\omega)) f(\omega) d\omega$ with $M(\overline{W}) = 0$ be the conditional expectation of the marginal utility of c_1. After integrating by part to eliminate the double integral and replacing K with (1.38), one derives the first-order condition that $\acute{B}(W)$ must satisfy for pointwise maximization :

$$0 = -p(x(W)) + \left[Q(W) + \left(\frac{M(W)}{M(\underline{W})} - (1 - F(W))\right) \frac{Q'(W)}{f(W)}\right] U'(c_2(W)), \; W \in [\underline{W}, \overline{W}]. \tag{1.39}$$

Define $D(W) = \left(\frac{M(W)}{M(\underline{W})} - (1 - F(W))\right) \frac{Q'(W)}{f(W)}$, a continuous function of $W \in [\underline{W}, \overline{W}]$. Because $D(\underline{W}) = D(\overline{W}) = 0$, Condition (1.39) becomes at both $\underline{W}$ and $\overline{W}$

$$0 = -z(W - x(W)) + U'(c_2(W))$$

If the contribution was actuarially fair ($T(W) = p(x(W)) B(W)$), there would be no distortion in the quantity $\acute{B}(W)$, except for the indirect effect of the risk-internalization failure. For $W \in (\underline{W}, \overline{W})$, it can be shown that $D(W)$ is strictly negative, with a U-shape reaching a minimum at some point in the middle of the distribution. Starting from a situation with no distortion where the benefit increases simply from the effect of the consumption smoothing, the function $D(W)$ creates an increasing and convex path for $\acute{B}(W)$. This outcome contrasts with the impact of adverse selection in the private market where the coverage is adjusted downward for everybody except the person with wealth $\overline{W}$, and where the adjustment is inversely proportional to the wealth. Consequently, the public system provides higher retirement income than private competitive insurance when both systems address the issue of adverse selection.

The contribution $\acute{T}(W)$ is analyzed by looking at (1.37) and (1.38) together, where K plays a role of surplus reallocation between the participants. These two equations indicate that the lifetime surplus enjoyed by any individual has three components. The first component is the informational rent that is positive and increasing with wealth, as seen above. The second component is the average surplus of the population (before the informational rents) ; it is positive. The last component, the average informational rent of the population, is negative, and it ensures a balanced budget for the principal. In comparison with the competitive market, the fact that the public system faces a unique budget constraint over an entire population rather than over each individual gives the public system more flexibility in coping with adverse selection. The resulting function $\acute{T}(W)$ for the contribution mitigates the overall reduction in the benefits required to induce type revelation, particularly for poorer and less-risky people.

The path of $\acute{T}(W)$ is characterized as $\acute{T}'(W) = Q(W)\, U'(c_2)\, B'(W) > 0$ when $\acute{R}(W) = 0$:[26] the contribution increases with wealth. However, the information rent makes $\acute{T}(W)$ flatter than the path of the actuarial fair contribution $p(\acute{x}(W))\, \acute{B}(W)$ and creates an actuarial subsidy from poor to rich people. This system is thus also regressive, but to a smaller extent than the simple public system. Indeed, low wealth people are now better-off than under our first public system because $\acute{T}(\underline{W}) < E_W\left[\acute{T}(W)\right]$. On the other side, the pension benefit of the wealthy people is not as highly subsidized as under the simple system, but their longevity risk tends to be completely covered, so that they will also prefer the incentive compatible public system. Although $\acute{T}(W)$ corresponds to the actuarial fair contribution only for the individuals in the middle of the wealth distribution, these middle-class people incur the biggest downward distortion in their amount of benefit.

The impact of this mechanism on the lifestyle choice is finally assessed with

[26] In numerical simulations, the downward distortion in the benefit amoutn for a given W is much less important than in the private market, and saving bonds are never needed.

Figure 1.4. The risk-internalization failure creates the jump from the line "Perfect Information" to the line "Moral hazard only," as in the previous section. The difference between the latter and the "OAS" line captures the combination of the incentive effect and the wealth effect. The incentive effect follows from the downward distortion in $\acute{B}(W)$: it is nil when $W = \underline{W}$ and $\overline{W}$, and it limits the health investment for the people in the middle of the wealth distribution. This effect alone would make the function $\acute{x}(W)$ coincide with the "Moral Hazard" line on both extremities, and be slightly more convex in between.

Over the incentive effect, the actuarial subsidy related to the function $\acute{T}(W)$ generates a wealth effect that makes $\acute{x}(W)$ pivoting on the middle of the distribution : compared to the longevity induced by the sole risk-internalization failure, that of wealthier people would be higher while that of poorer people would be lower. Therefore, wealthier people enjoy greater longevity than under any other systems. In contrast, the longevity of less well-off people may or may not exceed the longevity observed under the other systems, and the comparison depends on the extent of the subsidy and the failures of the other systems. As for the disparities in longevity, they are more important in this incentive compatible system than under the perfect information benchmark, though the comparison with other systems is related to the model parameters.

1.5 Conclusion

This paper studies how the mechanisms insuring the longevity risk affect life expectancy and its disparities within the population; it contrasts with the recurring issue of the effects of changing longevity on pension plans. In a population continu-

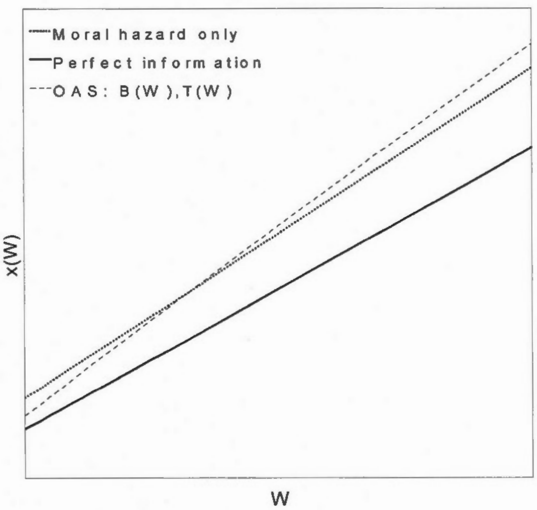

Fig. 1.4 – Investment in longevity in function of wealth : OAS is the optimum public mechanism.

ously defined over a wealth distribution, life expectancy endogenously results from lifestyle decisions and always increases with wealth. It means that wealth inequalities translates into longevity inequalities, but subject to the influence of each of the mechanisms analyzed here on people's decisions. Adverse selection is the sole imperfection introduced in the model; interestingly, it is the source of further imperfections, such as moral hazard behavior.

Our benchmark is the private insurance sold in a competitive market under perfect information. Due to the observed link between premium and risk, the lifestyle-related cost includes the impact of the decision on the annuity premium. Indeed, the higher premium that would otherwise be associated with a greater longevity limits the investment in health, and the longevity risk is thus internalized.

In the absence of internalization, there is an upward distortion in the health investment and in longevity. As the distortion increases with wealth, the disparities in longevity is also worsened. This form of moral hazard behavior, that we called the risk-internalization failure, occurs under two circumstances. First, in the private annuity market, this failure is an endogenous and direct consequence of adverse selection because the revelation mechanism eliminates the signal that permits the risk internalization. Second, in a public pension plan, the contribution does not usually reflect the individual's risk, and although the budget is balanced at the population level, the decision of a single person has a negligible impact on the overall system cost.

Adverse selection also obliges insurers and pension providers to prevent imitation by designing insurance mechanisms accordingly. Some individuals end up with suboptimal retirement income, which reduces the incentive to invest in longevity. In addition, the contribution or the premium paid for the retirement income may differ from the individual's actuarial premium, creating a positive or negative wealth effect that modifies the lifestyle decision.

In a competitive market, we look at a separating mechanism based on the equilibrium definition of Rothshild and Stiglitz (1976). Although everyone pays his actuarial premium, only the wealthiest person sees his retirement needs completely met. The downward distortion in benefit, imposed by the incentive constraints, increases as wealth decreases, and is at its largest for the poorest person. This lower retirement income discourages the investment in health and counterbalances the upward distortion in longevity caused by the risk-internalization failure. Compared to the perfect information benchmark, the longevity disparities are exacerbated without ambiguity and wealthy people overinvest in their longevity. However, less well-off people may end up with a higher or lower longevity than the benchmark level. Indeed, the downward effect of the information externality dominates if the wealth is significantly low compared to the highest wealth; the opposite is true for high marginal product of health investment, that is for a highly concave premium rate function.

We also model two types of public pension plans. To ensure comparable outcomes, the promoter does not have access to more information than an insurer. However, he can exploit the mandatory nature of a public system to impose cross-subsidies within the population and to keep a balanced budget.

The first plan can be seen as a pooling contract where everybody receives the same pension benefit in exchange of the same contribution. The benefit may make poorest people better-off at retirement, which is an incentive to invest in longevity. However, it is suboptimal for wealthier people, who must fulfil their retirement needs with more expensive saving bonds and thus incur a negative wealth effect that limits their health investment.

The single contribution involves an actuarial subsidy from the less healthy and less well-off people to the healthier and wealthier ones. Although this subsidy aggravates inequalities in longevity through a wealth effect, as mentioned by Davies and Kuhn (1992), its impact on longevity is more or less compensated by the impact of the inadequate level of benefit. When the effect of the risk-internalization failure is also considered, the life expectancy and its disparities with this system generally exceed the ones under perfect information.

Two further comments can be made about the single premium rate. First, although it is a feature of most public systems around the world, it is regressive and goes counter to the perspective of Diamond (1977) who presents the double role of insurance and redistribution as a key peculiarity of Social Security. Second, this non-sophisticated system shares a characteristic with private insurance : a wealthy and healthy person creates a negative externality on a poor and less healthy person. In the private market, the well-known information externality triggered by adverse selection does not give a further advantage to the former; in the public system, the subsidy can be seen as an actuarial externality that profits to wealthy people.

The other mechanism is an application to the pension literature of an optimal taxation problem with adverse selection. The menu, defined by a benefit and a contribution, maximizes the population welfare, and contrasts with the menu of a competitive insurer that maximizes the welfare of each individual subject to his own actuarial premium. As a result, the people at both ends of the wealth distribution are spared from a distortion in their benefit. Middle-class people incur the biggest penalty, but to a lower extent than with a private coverage. Indeed, among the three mechanisms coping with adverse selection, this plan provides the best fit between the benefits and the retirement needs.

This good fit is made possible because the information rent included in the contribution schedule prevents imitation by compelling low-risk (high-risk) people to pay more (less) than their actuarial price. Due to the positive correlation between risk and wealth, poor people subsidize rich people, like in the simple public plan, although the subsidy is not as important as with the flat contribution. Wealthy people would thus prefer the third mechanism, which also allows them the highest investment in longevity from the high incentive of a complete coverage and the positive wealth effect of the subsidy. It means that this plan creates higher disparities in longevity than the perfect information benchmark.

Because this incentive compatible public system has more flexibility in meeting the incentive constraints and faces fewer budget constraints than the private sector, it provides a greater total welfare. However, it is interesting to note that less wealthy people may prefer the private sector to avoid the information rent, even with a lower retirement benefit. Because the customized menu better meets the needs of each individual, this sophisticated system also generates higher population welfare than the pooling public system.

In comparison, Philipson and Becker (1998) assert that a private market dominates a public system and avoids the additional pressures on pension funding related to the overinvestment in longevity : we see that this is only true in the absence of adverse selection. When Davies and Kuhn (1992) consider moral hazard as an exogenous condition of a private annuity market but still without adverse selection, they also conclude that a public system does not dominate if it triggers further imperfections such as inadequate benefits and non fair pricing. Finally, Platoni (2010) shows that a public system built as a pooling contract may be welfare-enhancing over the separating equilibrium of a private market when adverse selection is caused by the non observable time preference; however, the homogeneity in wealth hides the issue of inadequate benefit that may be value-destructive.

Chapitre 2

Long-Term Care and Longevity Insurance : Correlation, Adverse Selection and Incomplete Markets

2.1 Introduction

This paper examines the effects of two forms of imperfection, asymmetric information and incomplete markets (insurance is absent or insufficient for at least one risk), when longevity and the need for long-term care (LTC) are the risks of interest. It will highlight the role played by the peculiar correlation structure of these risks when designing the insurance contracts. It will also examine the impacts of some market realities on the model, such as the absence of exclusivity in the annuity market, and the absence of moral hazard for most LTC risks.

The longevity risk is the possibility of surviving savings in case of a very long life or to die too early to enjoy the money saved at the expense of past consumption. LTC is associated with chronic diseases during old age that does not necessarily reduce the lifespan, but limits the ability to perform basic daily tasks to the point where assistance is required. Since this assistance may be very expensive, it increases the financial uncertainty related to aging : indeed, Brown and Finkelstein (2008, 2009) estimate that one third of the American population over 65 may have recourse to a nursing home, at an annual cost that may easily exceed $50,000.

To insure the longevity risk, private insurers sell annuity contracts that guarantee income throughout the retirement years and avoid unwanted bequests, in exchange for a premium paid before retirement. Similarly, people purchase a LTC insurance contract (LTCI) to receive pre-defined indemnities if they need LTC. Like annuity providers, LTC insurers are committed to the terms and conditions of a contract that may be in force for a period as long as 20, 30 or 40 years.

There are other similarities between both risks and both insurance markets. First, the protection offered by governments or employers is often insufficient. Such is particularly the case for the longevity risk in Anglo-Saxon countries where people mainly rely on tax-exempt savings rather than on defined-benefit pension. Other countries, facing demographic and budget constraints, also tend to reduce their protection.[1] As for LTC, the coverage is usually limited to the poorest part of the population, such as Medicaid that pays for about 35% of costs in the US.

[1] In countries such as the US, the UK or Canada, the public systems provide insufficient coverage except for the poorest part of the population. For example, the Old-Age Security program (OAS) replaces about 55% of the income for low-scale earners but 34% for high-scale earners (U. S. Social Security Administration, 2010). Many continental Europe public systems are more generous and meet most retirees' needs. The replacement rate in France varies from 47% for high incomes to 70% for low incomes. This rate is around 66% in Sweden (International Social Security Association, 2010).

Despite insufficient public coverage, the use of private insurance remains small in both cases. Given the theoretical welfare gains of insuring risks, it gives rise to the puzzle of low or no coverage, and an important literature proposes various explanations, though no consensus seems to appear.[2] Indeed, even among the contracts sold, the coverage remains low.[3] As a consequence, both insurance markets are far from being complete and may even be considered missing for some segments of the population.[4]

Evidence of adverse selection is identified in both markets. It would explain a 10% loading in the US annuity market, as calculated by Mitchell and al. (1999). Finkelstein and Poterba (2002, 2004) have similar measures in the UK market. Finkelstein and McGarry (2006) also identify this failure in the LTCI market, as insurers seem limited in their ability to attribute a specific risk category to their clients. In addition, insurers do not seem to use all the information at their disposal when they price a contract : Finkelstein and Poterba (2006) discuss the puzzle of unexploited information, with the examples of the LTCI prices being uniform across genders, and the annuity prices being independent of the annuitant wealth.

[2]Explanations that would be common to both markets include premium loading, liquidity concerns, existence of cheaper substitutes such as support from relatives, need for liquidity, limited rationality, and financial illiteracy. Adverse selection may also explain the small annuity markets while underwriting restriction may be an issue of the LTCI market.

[3]Brown (2007) and Finkelstein and Poterba (2004) highlight that most annuities sold in US and UK include a pure saving component. In the US LTCI market, Brown and Finkelstein (2007) estimate a rate of coverage comprehensiveness of about 34%.

[4]This paper does not consider other health-related risks, such as the need for acute care associated to the morbidity risk, for which public or private insurance presents distinct characteristics. For instance, the problems of incomplete market and low coverage are not as prevalent, and the contracts are usually sold over a short period, or subject to experience-rating.

Moreover, information asymmetry seems limited to adverse selection in both markets, with moral hazard relatively unlikely. Indeed, annuity payments occur during old age, when the insured lives with the consequences of his genetic background and past lifestyle; there are then few possibilities of changing behavior to lengthen the benefit period.[5] Regarding LTC, Grabowski and Gruber (2007) and Brown and Finkelstein (2008) agree that the use of nursing home is close to be price inelastic, although the latter recognize that insurance may increase the demand for in-home care. However, LTCI contracts that exclusively cover in-home care are rather rare and institutional care are included in most LTCI contracts, as mentioned by Brown and Finkelstein (2009). Therefore, it is justified to consider that neither the annuity market nor the LTCI market raise any moral hazard issue.

To analyze these risks and the associated insurance markets, we present a simple two-period model corresponding to the active and the retirement years respectively. Death may occur at the end of the first period with a given probability, or with certainty after the second period. If an individual survives beyond his active life, he lives his retirement either in good health, or in poor health, and in the latter case, he requires LTC. All the uncertainty is resolved before the beginning of the second period. During active life, an individual optimally allocates wealth between consumption and savings. Part of the savings may be dedicated to the purchase of LTC insurance while the rest constitutes the premium paid to the annuity provider. At the beginning of the retirement period, with the materialization of the risks, the terms of the insurance contracts are honored : the person receives the annuity

[5]Finkelstein and Poterba (2004) use this argument to show the pertinence of testing adverse selection in this market, in contrast with other types of insurance for which it is more difficult to distinguish adverse selection from moral hazard.

payment if he is alive, and a pre-defined LTC reimbursement if he is also in poor health.

Because the need for LTC is conditional upon a long life, which is the materialization of the longevity risk, the probability distributions of both risks are positively correlated for each given individual : this correlation will be referred to as the individual correlation. Furthermore, based on a growing empirical literature documented in Section 2.4, it appears that an extended lifetime translates into an increase in disability-free life expectancy, where this increase may even exceed the gain in life expectancy. It means that those reaching their retirement in good health are more likely to die late (high longevity risk) and less likely to suffer impairment (low LTC risk) than those in poor health. In other words, there is a negative correlation in risk exposure at the population level between healthy and unhealthy individuals. This negative correlation relies on the simultaneous improvement in the survival and disability trends, where disability means difficulties in personal care and other daily activities requiring LTC.[6]

Therefore, the longevity and LTC risks present two simultaneous forms of correlation : a positive correlation in the risk distribution at the individual level and a negative correlation in risk exposures at the population level. The first one captures a globally higher need for LTC when there are more elderly people in a population. The second one recognizes that an unhealthy person is less likely to survive than a healthy person, but if both survive, the unhealthy one is more likely to require LTC. These two forms of correlation between LTC and longevity risks are present in the

[6]In contrast with the disbility trend, Cutler, Ghosh, Landrum (2013) mention that the morbidity trend of the elderly is more ambiguous, which may justify, in further research, an assumption of positive populational correlation between illness and survival risks.

simulation of Spillman, Murtaugh, and Warshawsky (2001), as well as in the theoretical analysis of Webb (2009).[7] In comparison, Fluet and Pannequin (1997) consider two generic risks with either a positive or negative correlation in risk exposures at the population level, but with independent risk distributions at the individual level. Under adverse selection, all these papers conclude that exploiting the populational negative correlation through a bundle of both coverages within a unique contract provides higher welfare than insuring each risk separately. The following analysis will validate whether this conclusion holds when the model takes into account some realities of the LTCI and annuity markets.

One of these realities is the absence of exclusivity in the annuity market, unlike other types of insurance. A nonexclusive contract means that an insurer cannot observe and control the total amount of insurance purchased by an individual, whether with one or many insurers. As the individual may purchase the annuity amount that he desires, the insurer cannot design any incentive mechanism based on price and a quantity to deal with adverse selection. However, an incentive menu remains possible if the insurer can replace quantity with some other feature, such as a payment to the estate in case of early death; the contract is then apportioned between a life portion and a non life portion. Finklestein and Poterba (2004) find empirical evidence of selection on such contractual options, while they indeed do not detect any selection based on the amount of annuity. They also estimate that more than 70% of the annuities sold in the United Kingdom exhibit such features, and Brown (2007) mentions a similar situation in the US market. Therefore, unlike the usual annuity

[7] Compared to our paper, Webb (2009) generalizes some assumptions, such as distinct risk-aversion and administration costs, and restricts other ones, such as imposing a CARA utility function, a limit on overinsurance, and an exclusive annuity contract.

models of the theoretical literature, such as Eckstein, Eichenbaum and Peled (1985), Eichenbaum and Peled (1987), Webb (2009), Davidoff (2009), Platoni (2010), our annuity model does not impose exclusivity and allows instead the annuity contract to have a non life dimension.

In comparison, LTCI is modeled as a generic and exclusive insurance contract, because the indemnity amount paid in case of illness is well observable. Moreover, moral hazard being ruled out, and because we consider a competitive market with zero profits on the supply side, an insurer is indifferent to the quantity sold, and there is no reason to forbid overinsurance. In their analysis, Fluet and Pannequin (1997) and Webb (2009) limit the coverage of each contract to the amount at risk, while the global coverage of the unique contract of Gollier and Schlesinger (1995) cannot exceed the aggregate loss. No such limit is imposed in our model.

Given the characteristics of each coverage that we account for, our analysis starts with insurance available for only one risk, and then only for the other; this is done alternatively under perfect information and adverse selection. Describing these four cases helps understanding the interactions between distortions caused by market incompleteness and imperfect information, and allows us to develop the tools for the analysis of complete markets.

When LTCI is the sole insurance under perfect information, the positive individual correlation in risk distributions leads to an upward distortion in the desired coverage, in line with Doherty and Schlesinger (1983). Under asymmetric information, we find a separating equilibrium where the upward distortion in coverage allowed by the absence of moral hazard mitigates and may even eliminate the effect of the information externality. Since the extent of the distortion is specific to each individual, it may be used as a revelation mechanism with no further need to constrain the low-risk coverage. The absence of moral hazard is thus welfare enhancing for both insureds.

When annuity is the sole contract available under perfect information, the risk is entirely covered by a life only annuity. Overinsurance is made impossible by a non-arbitrage constraint that rules out borrowing for the purchase of annuity : indeed borrowing entails the possibility of not reimbursing in case of death.[8] Under adverse selection, the absence of exclusivity forces the insurer to build a two-dimensional incentive menu that relies on introducing a life portion into the contract rather than controling the amount of annuity. In the absence of a bequest motive, this annuity life portion does not directly modify the individual lifetime value although it indirectly does so by decreasing the cost of transferring wealth to the second period. Consequently, it cannot incite annuitants to self-select their own risk category, so that the optimum contract results in a pooling equilibrium and is characterized by linear pricing where the unhealthy annuitant subsidizes the healthy one.

In a complete insurance market subject to adverse selection, two distinct market situations are considered. In the first one, insurers specialize in a particular risk and work independently; each one establishes a menu of contracts while assuming that the other insurer acts similarly on its own market; however, each one ignores the actual contract purchased by his client on the second market. A person is then, at the same time, a high risk for one coverage and a low risk for the other coverage,

Since the annuity provider does not have more information on his customers than in the absence of LTCI, he has no other choice than proposing a pooling contract. On the other market, the marginal utility of LTCI is modified by the coverage of the longevity risk. Although the LTCI market still results in a separating equilibrium, the

[8]The same allocation would be obtained under the assumption of exclusivity.

amounts of coverage are different from the amounts found in the absence of annuity. In comparison, Fluet and Pannequin (1997), as well as Webb (2009), exactly replicate the standard single-risk outcomes. In the former paper, this is due to the fact that individual probability distributions are taken to be independent ; in the latter paper, the distortion is eliminated by the moral hazard constraint. We also show that the healthy person is more likely to be better off under adverse selection than under perfect information since his subsidized annuity may more than compensate the constraint on his LTC contract.

In the second situation of a complete market, an insurer offer a menu of contracts covering LTC and longevity risks simultaneously. We find that such bundling leads to a separating equilibrium. The high-risk person reaches his perfect information situation, whereas the low-risk person obtains a constrained contract. Given the difference between the coverages, the design of this constrained contract varies whether the low risk is the healthy or the unhealthy person.

While separation is not possible in a stand-alone annuity market, it is the equilibrium outcome when the annuity coverage is combined with the LTCI coverage. If the unhealthy person is the high risk, he reaches the perfect information allocation and is then better off than with two independent single-risk contracts : he avoids the annuity subsidy and keeps an unconstrained LTCI. For his part, since the healthy person now pay his higher, fair annuity premium, rather than the pooling premium, some pressure is relieved from the incentive constraint, and his LTCI coverage is less constrained than under the situation of two single-risk contracts.

When the healthy person obtains his perfect information allocation as the high-risk insured, the lost of the subsidized longevity coverage obtained in the single-risk markets is likely to counterbalance the absence of constraint on his LTCI coverage :

he may then prefer to be insured by two separate contracts rather than by a bundled contract. In fact, he may also prefer the separate contracts when he is the low risk. This is a contradiction to the conclusion of previous literature on multiple-risk insurance where bundling always generates welfare gains to all people.

The rest of the paper is structured as follows. Section 2 details the assumptions and the basic model, including the description of the insurance contracts. Incomplete markets under perfect information are analyzed in Section 3. Section 4 looks at the effects of adverse selection first when market is incomplete, then under complete market. Section 5 concludes.

2.2 Basic model and informational issues

The two-period model used throughout the analysis exhibits and exacerbates key features of most people's lives. An individual in good health during his active life ($t = 1$) does not know if he will be alive during his retirement period ($t = 2$). As he approaches retirement, the person usually obtains information about his current condition and future prospects. For example, he undergoes more frequent medical checkups and may be diagnosed with some diseases. To capture this behavior, it is assumed that the individual learns at the end of his active life whether he will live to retire and, if so, in which health state and whether long-term care will be required during retirement years.

Accordingly, the three possible outcomes at retirement highlight the interactions between the longevity risk and the illness risk : good health h, poor health (or illness requiring LTC) i, and imminent death d. In state d, the individual dies at the end of active life, and he receives no utility from the second period, neither from consumption nor from leaving a bequest[9]. States h and i are associated with the same, certain, life span over the retirement period but they differ by the expenditures required : no expenditures in case of good health, and care expenditures of m in case of poor health. The three states are respectively associated to probabilities p_d, p_i, and p_h, with $p_d + p_i + p_h = 1$. Because illness is conditional upon survival (only surviving people may require LTC), the probability distributions of the illness and survival risks are positively correlated for a given individual.

Utility $U(c)$ is received from consumption c_1, c_2^i and c_2^h over each period and state. The function is twice differentiable, increasing and concave with $U(0) = 0$. Health dependent utility would be redundant because the expenditure m already reduces consumption[10]. Because revenue uncertainty is not a concern of this paper, the wealth W is exogenous and captures earnings and past savings. The condition $W > m$ ensures positive consumption in any period and health states.

In real life, most people plan in view of retirement throughout their active life. In the model, the contingent consumption plan is established at the beginning of active life based on expectations about the future. It is adjusted at the beginning of the

[9]Although the existence and the importance of bequest in the economy is broadly recognized, there is still no agreement in the literature on its motivation. Some argue that money is unintentionally left upon death as a result of the uncertainty on the date of death, the required medical expenses and on the available income (Hurd (1987, 1989), Dynan and al. (2004)). Others invoke a deliberate preference for intergenerational wealth transfers (Bernheim (1991), Gale and Scholz (1994)). Between both views, Dynan and al. (2002) state that a concern for leaving assets to heirs may exist, but the bequest would materialize only if the required savings were overestimated. They conclude that using both reasons to justify bequest would be redundant and would not really modify the household behavior. In any case, a person prefers his own consumption to that of his heirs, and the zero-utility from bequest can be seen as a normalization.

[10]Davidoff (2009) uses this argument in the numerical simulation of a similar model.

retirement period to take into account new and final information on the remaining life span and on the required medical expenses.

When the market offers no insurance to cover the risks, retirement planning is limited to the choice of a retirement capital R. Financial risk is removed from the analysis, so that the amount R is invested in a saving bond earning a known and constant return of normalized to zero. The first-period consumption is then

$$c_1 = W - R. \tag{2.1}$$

In this environment, R is the sole resource available to provide for the second-period consumption and medical expenses. In the absence of bequest motive and with no further uncertainty, it is optimal to spend this whole amount as :

$$c_2^i = R - m, \tag{2.2}$$

$$c_2^h = R. \tag{2.3}$$

Since the analysis focus on two aging-related risks and their associated insurance mechanisms, we ease the development by setting the time preference rate equal to the investment return, that is to zero. Using (2.1) to (2.3), the two-period consumption path is determined by the optimal choice of saving

$$\max_R U(c_1) + \left[p_i U(c_2^i) + p_h U(c_2^h)\right], \tag{2.4}$$

and the solution results from the first-order condition

$$U'(c_1) = p_i U'(c_2^i) + p_h U'(c_2^h). \tag{2.5}$$

Consumption tends to be higher in the first period when the ex-ante need for savings is uncertain, as implied by $p_i + p_h < 1$, but the possibility of two states in the second period adds a complication to the path. With $c_2^i < c_2^h$ from (2.2) and (2.3), the concavity of the utility function leads to $c_2^i < c_1$. However, the excess of savings required to cover possible medical expenses is released into consumption if the individual turns out in good health, meaning that c_2^h may exceed c_1 if p_i and/or m are high.

2.2.1 Insurance markets

With an insurance market for each risk, the contracts are signed and the premiums are paid in period one, before the materialization of the risks. The terms of the contracts are honoured and the payments made at the beginning of the retirement period upon the materialization of the risks.

Under LTCI, the individual receives the indemnity q if he retires in poor health, and nothing if he retires in good health, or if he dies prematurely. Given a premium rate of σ per dollar of indemnity, a total premium $\Sigma = \sigma q$ is drawn from savings.

Full coverage means $q = m$. Overinsurance is usually not allowed in the insurance literature or in reality, as it may incite to moral hazard behavior. In Rothshild and Stiglitz (1976), the ability of insurers to prevent an insured from purchasing a higher coverage than his potential loss is a condition for the robustness of the equilibrium. In a multiple risks context, Fluet and Pannequin (1997) and Webb (2009) limit the coverage of each contract to the amount at risk, while Gollier and Schlesinger (1995) consider a unique contract with a global coverage that cannot exceed the aggregate loss.

Regarding LTCI, Grabowski and Gruber (2007) show no evidence of moral hazard in the use of nursing home, as it is close to be price inelastic. Brown and Finkelstein (2008) recognize this fact, although that insurance may increase the demand for in-home care. However, LTCI contracts that exclusively cover in-home care are rather rare, institutional care being included in most LTCI contracts, as mentionned by Brown and Finkelstein (2009). Therefore, we may consider the LTCI market as exempt from moral hazard issue : in this situation, $q > m$ should be allowed as long as the insurer obtains non negative profit from the contract. This absence of constraint will have consequences on the characteristics of the contracts under imperfect information.

To cover the longevity risk, the person uses the rest of his savings to purchase an annuity that will pay an income of Z during the second period if he is alive. Our annuity model contrasts with those usually presented in the theoretical literature, such as Eckstein, Eichenbaum and Peled (1985), Eichenbaum and Peled (1987), Webb (2009), Davidoff (2009), Platoni (2010), as it recognizes that this contract is known to be nonexclusive. This characteristic, observed in the annuity market, does not generally apply to the other types of insurance, including the LTCI market.[11] It has no consequence on the allocation and the welfare under perfect information, but it will affect the ability of the insurer to cope with adverse selection in Section 2.4.

A nonexclusive contract means that an insurer cannot observe and control the total amount of insurance purchased by an individual, whether it is with one or many insurers. An individual may then purchase the amount of annuity he desires, which allows him, for instance, to bypass an incentive menu of contracts that would be defined by a price and a quantity. However, an incentive menu remains possible if the insurer uses other contract features in place of quantity. One such feature promises

[11] For example, the insurer may limit the reimbursement q through deductibles and exclusion clauses.

a payment to the estate in case of early death of the annuitant; it may consists in a guaranteed period option (the insurer must pay the income stream for a minimum number of years, such as 10 or 15 years, independently of the annuitant date of death), or a capital protection option (the estate is entitled the difference between a given percentage of the premium, such as 50%, and the sum of the payments made before the annuitant death). In their empirical study, Finklestein and Poterba (2004) find evidence of selection on these options, since annuitants with greater *ex-post* longevity purchase contracts with bigger life portion. They also detect no selection on the amount of annuity, which is consistent with the nonexclusive characteristic of the annuity contract. In fact, they estimate that more than 70% of the annuities sold in the United Kingdom exhibit such features, and Brown (2007) mentions a similar situation in the US market.

In our two-period framework, the feature promising a payment upon early death consists in allocating each dollar of the annuity between a non-life portion $1-a$, paid independently of the annuitant state, and a life portion a paid only if the individual survives.[12] In a financial market with no friction, the non-life portion is equivalent to an investment in a saving bond, a reduction in the coverage that the annuity offers against the longevity risk. In consequence, the parameter a should be used to define the coverage against the risk, rather than the annuity amount Z, which cannot be controlled by the insurer.[13]

With the return on the saving bond normalized to 0, the insurer charges 1 dollar

[12]For instance, the cases $a = 1$ and $a = 0$ correspond to a pure life annuity and to a certain annuity, respectively.

[13]In addition, the options of payment upon early death are efficient selection tools because they cannot be replicated by the purchase of multiple contracts. For instance, it is impossible to increase the life coverage by purchasing many reduced-coverage contracts.

for each unit of the non-life portion of the annuity. In addition, he asks a premium $\pi \in (0,1)$ for each unit of the annuity life portion[14]. In order to avail himself with an annuity of $Z = aZ + (1-a)Z$, the individual must pay $\pi^a(a)Z$ before retirement, where the function $\pi^a(a)$ is the unit cost of the annuity defined by

$$\pi^a(a) = a\pi + 1 - a. \tag{2.6}$$

In line with the higher premium required by the promise of payment in case of early death, we have $\pi^a(a) > \pi$ when $a < 1$.

Because payments occur during old age, when the annuitant lives with the consequences of his genetic characteristics and past lifestyle, there is limited room for a change in behavior that would lengthen the period over which the benefits are paid; consequently, moral hazard is then not an issue.[15] However, a life portion higher than the annuity amount $(a > 1)$ would mean that the annuitant borrows from the insurer an amount of $Z(a-1)$ to increase his retirement income at a lower cost, with $\pi^a(a) < \pi$. Survival after the retirement date would permit the reimbursement of the loan from the annuity amount, leaving net retirement income of Z, whereas an early death would imply no reimbursement, pushing the insurer out of the market. As such leverage provides an opportunity for arbitrage, it is not sustainable, and a no arbitrage condition

$$a \leq 1 \tag{2.7}$$

is required. Consequently, overinsurance is prohibited even if there is no possibility

[14]A premium rate $\pi > 1$ would not be sustainable in a competitive market as it would make the life portion more expensive than a saving bond, though less costly to the insurer.

[15]Finkelstein and Poterba (2004) use this argument to show the pertinence of testing adverse selection in this market, in contrast with other types of insurance for which it is more difficult to separate adverse selection from moral hazard in a measure of information asymmetry.

of moral hazard.

2.2.2 Pareto-optimal market

In a Pareto-optimal world, markets offer complete insurance, in the sense that they provide coverage against both risks, and they are perfectly competitive with no agency issues. As risk-neutral insurers make zero profits, an individual pays the actuarial fair price to purchase the quantity of insurance he deems optimal. The actuarial fair unit premium of LTCI equals the discounted unconditional illness probability

$$\sigma = p_i. \tag{2.8}$$

Similarly, the annuity provider calculates the premium rate of the life portion as the survival probability

$$\pi = p_i + p_h. \tag{2.9}$$

With the unit cost $\pi^a(a) \leq 1$ for any $a \geq 0$, the annuity contract is a more efficient tool than the saving bond to transfer wealth to the second period. Therefore, a financial market offering annuities rejects the possibility to purchase any saving bond. The whole savings of the individual is then dedicated to the purchase of LTCI and annuity contracts, which transform constraints (2.1) to (2.3) as follows :

$$\begin{aligned} c_1 &= W - \sigma q - \pi^a(a) Z, \\ c_2^i &= Z + q - m, \\ c_2^h &= Z. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Given the unit prices, the utility maximizing consumption path is determined by the joint choice of the insurance coverage $\overline{q}_c$ and $\overline{a}_c$ along with the amount of annuity $\overline{Z}_c$,

$$\overline{V}_c = \max_{Z,q,a} U(c_1) + p_i U(c_2^i) + p_h U(c_2^h), \tag{2.11}$$

$$\text{subject to } (2.10), \ (2.6),$$

$$\text{and } Z \geq 0, \ q \geq 0 \text{ and } 0 \leq a \leq 1.$$

The subscript c and the upper bar refers to a situation complete market and perfect information, respectively

Differentiating with respect to a gives

$$U'(c_1) Z (1 - \pi),$$

which is strictly positive since $\pi < 1$.[16] Consequently, the corner solution

$$\overline{a}_c = 1 \Rightarrow \pi^a (\overline{a}_c) = \pi \tag{2.12}$$

is selected and the individual prefers a full annuitization of his retirement asset ; this result would hold for any $\pi \in (0, 1)$.[17]

Given (2.12), the optimal annuity amount $\overline{Z}_c$ is derived from condition

$$\pi U'(c_1) = p_i U'(c_2^i) + p_h U'(c_2^h). \tag{2.13}$$

The consumption levels must also satisfy the optimal $\overline{q}_c > 0$ determined by

$$\sigma U'(c_1) = p_i U'(c_2^i). \tag{2.14}$$

[16] The marginal utility of coverage is strictly positive over the whole domain of a, because the lifetime utility only recognizes the "bad state" of nature, that is survival. For a detailed discussion on this subject, see Chapter 3.

[17] This is in line with Davidoff, Brown and Diamond (2005), and generalizes Yaari (1965), who requires fair annuity premium for complete annuitization.

Given the fair prices (2.8) and (2.9) and these first-order conditions, the time and state-dependent consumption is solved from

$$U'(c_1) = U'(c_2^i) = U'(c_2^h). \tag{2.15}$$

Since $c_2^i = c_2^h$, period two consumption is independent of the health state and full LTC coverage is optimal

$$\overline{q}_c = m. \tag{2.16}$$

Together with (2.12), this means that both risks are eliminated through full coverage and a perfectly smooth consumption path $c_{2c}^i = c_{2c}^h = c_{1c}$.

2.3 Incomplete market under perfect information

Incomplete market means that the market does not offer insurance against one of the risks.[18] This section examines how the absence of coverage on one risk affects the demand for the coverage on a second risk. It will develop the tools for the analysis in Section 2.4, where asymmetric information partially constraints one coverage.

2.3.1 Long-term care insurance only

When the insurance market exists only for the LTC risk, a situation identified with the subscript m, the individual maximizes his welfare by purcharsing a saving bond R (instead of the annuity characterized by the variables a and Z in the problem (2.11), and the quantity of insurance q :

$$\overline{V}_m = \max_{R,q} U(c_1) + \left[p_i U(c_2^i) + p_h U(c_2^h)\right]. \tag{2.17}$$

[18] One example is the incomplete market of Davidoff *et al.* (2005) where other correlated risks such as inflation and unexpected medical expenses are left uncovered.

Constraints (2.10) is modified as :

$$c_1 = W - \sigma q - R. \tag{2.18}$$

The joint choice of $\overline{R}_m$ and $\overline{q}_m$ is calculated with the conditions (2.5) and (2.14). Combined to the fair unit price $\sigma = p_i$, these conditions give

$$U'(c_1) = U'(c_2^i) = \frac{p_h}{1+p_i} U'(c_2^h). \tag{2.19}$$

Given $p_d > 0$ and the concavity of the utility function, $c_2^i > c_2^h$ so that

$$\overline{q}_m > m; \tag{2.20}$$

such an overinsurance is accepted in our model, as described above in Section 2.2.1.

Condition (2.19) also says that a retirement in good health implies a drop in consumption ($c_2^h < c_1$), consistently with the longevity risk left uncovered. In fact, if a person retires in a bad health state, the overinsurance provides indemnities beyond the strict cost of care to maintain the period one consumption ($c_2^i = c_1$). It may also be viewed as a mitigation of the uncovered longevity risk. Indeed, the model illustrates the result of Doherty and Schlesinger (1983) when two risks are positively correlated : if one risk is not insured, there is an upward distortion in the insurance demand associated with the other risk. Without longevity risk ($p_d = 0$), Condition (2.19) would generate no distortion and $\overline{q}_m = m$.[19] Moreover, although

[19]Under this LTCI contract, the premium $\sigma = p_i$ corresponds to the unconditional probability of illness, and the whole group of insureds contribute to finance the expenditures of those who survive in a bad health state. If the fair premium rate was equal to the conditional illness probability $\frac{p_i}{p_i+p_h}$, the zero profit condition would require that this contract is kept in force only upon survival : the insurer would cancel the contract and reimburses the premium in case of premature death, and only surviving retirees would finance the indemnity of the unhealthy. Conditions (2.5) and (2.14)

LTCI improves the expected individual welfare, this situation of incomplete market remains suboptimal compared to the Pareto-optimal benchmark, with

$$\overline{V}_m < \overline{V}_c. \tag{2.21}$$

The extent of the distortion $\overline{q}_m - m$ (or $c_2^i - c_2^h$) depends on the risk profile of the individual, as decomposed in the following results developed in Appendix A :

$$\begin{aligned} \text{if } dp_i + dp_h &= 0 \text{ and } p_d > 0, \text{ then } \frac{d\overline{q}_m}{dp_i} > 0; \\ \text{if } dp_i &= 0, \text{ then } \frac{d\overline{q}_m}{dp_h} < 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

The first line says that for a given longevity profile ($p_i + p_h$ constant, $p_d > 0$), the quantity of LTCI increases with the illness probability, which determines the marginal utility of insurance, although it implies a higher premium rate. From the second line, for a given illness probability p_i, the distortion decreases with the survival probability. It means that if an individual is more likely to survive, he will purchase higher saving bonds in view of his retirement; bonds being a substitute to LTCI, less LTCI is purchased. Intuitively, this person is more concerned about his longevity than about a potential illness. The combination of both lines says that the preference for LTCI increases with illness probability and decreases with life expectancy.

This section closes with a graphical analysis of the above results in order to introduce the tools used in Section 2.4 when the framework is complicated by adverse

would lead to $c_2^i = c_2^h$ and $\overline{q}_m = m$, with no overinsurance, but the longevity risk would remain uncovered with $c_1 > c_2^i = c_2^h$. By excluding any life component, such contract would bypass the positive correlation between both risks to eliminate the distortion. However, because this premium rate is higher than (2.8) and provides a lower lifetime value in the absence of bequest motive, it would be rejected by a competitive insurance market.

selection. Figure 2.1 displays the quantity q on the x-axis and the total premium Σ on the y-axis. The contract line $\Sigma = \sigma q$ stands for the set of contracts supplied by the insurer at a premium rate σ. An indifference curve gives the premium Σ that an individual is willing to pay for different levels of coverage q, keeping the lifetime value constant. This lifetime value increases if the curve moves in the southeast direction. The results

$$\frac{d\Sigma}{dq} = \frac{p_i U'\left(c_2^i\right)}{U'\left(c_1\right)} > 0, \tag{2.23}$$

$$\frac{d^2\Sigma}{dq^2} < 0, \tag{2.24}$$

as developped in Appendix B.1, indicate that an indifference curve is always upward sloping and concave. When the slope (2.23) of the indifference curve reaches σ, it is tangent to the contract line where the quantity of coverage maximizes the lifetime value; this is equivalent to Condition (2.14).

Figure 2.1 illustrates the impact of the longevity risk on the optimal choice of LTC coverage, by showing indifference curves with and without this risk. Both indifference curves have the same illness probability p_i, but the curve with the uncertain survival ($p_d > 0$) is steeper than the curve without longevity risk ($p_d = 0$). Algebraically, the result $\frac{d^2\Sigma}{dq dp_h} < 0$ of the appendix says that for a given illness probability p_i, $\frac{d\Sigma}{dq}$ strictly decreases when p_h increases (or similarly, when p_d decreases). Consequently, the tangency point occurs at a higher level of q when the longevity risk is present, in line with (2.22); inversely, without longevity risk, the tangency point corresponds to the complete coverage $q = m$.

When an individual faces both risks ($p_d > 0$), Figure 2.2 illustrates how the insurance of the longevity risk affects the demand for LTCI from $\overline{q}_m$ to $\overline{q}_c$. The dotted line, where there is no annuity, shows the situation of Figure 2.1. An increase

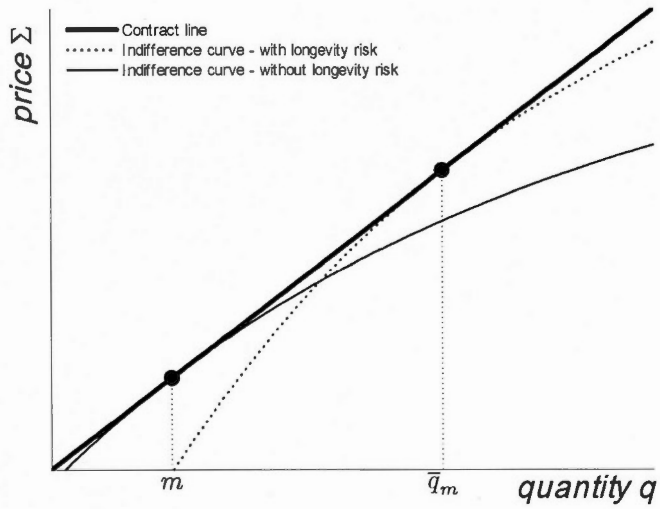

Fig. 2.1 – LTCI only under perfect information

in the longevity coverage moves upward the indifference curve $\left(\frac{d\Sigma}{da}\Big|_{dV=0} > 0\right)$ and flattens its slope $\left(\frac{d^2\Sigma}{dqda}\Big|_{dV=0} < 0\right)$, as shown in Appendix B.3; it corresponds to the dashed line. Given the positive impact of the annuity purchase on the lifetime value $\left(\frac{dV_c}{da} = (1-p_d)\, Z_c U'(c_1) > 0\right)$, the indifference curve moves to its final position on the continuous line, parallel with the dashed line, at the point $\overline{q}_c = m$ where the indifference curve is tangent to the contract line.

2.3.2 Longevity insurance (annuity) only

If the individual has access to the annuity market only, he optimally chooses the annuity amount $\overline{Z}_l$ and the life portion $\overline{a}_l$ of the annuity. The subscript l indicates a function or an endogenous variable where longevity is the only risk covered. The problem is defined by

$$\overline{V}_l = \max_{Z,a} U(c_1) + \left[p_i U(c_2^i) + p_h U(c_2^h)\right], \tag{2.25}$$

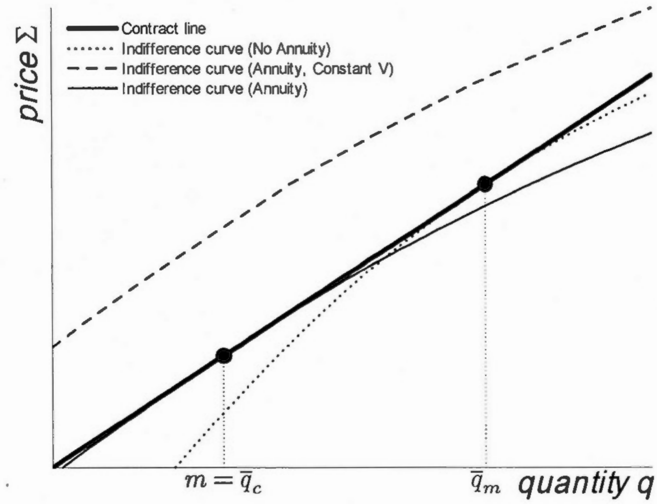

Fig. 2.2 – LTCI and annuity under perfect information

subject to

$$\begin{aligned} c_1 &= W - \pi^a(a) Z, \\ c_2^i &= Z - m, \\ c_2^h &= Z \end{aligned} \tag{2.26}$$

and (2.6).

The reasoning behind the annuitization choice of Section 2.2.1 still applies, so that full annuitization is optimal with[20]

$$\overline{a}_l = 1 \Rightarrow \pi^a(\overline{a}_l) = \pi. \tag{2.27}$$

[20]In real life, the presence of a non insured illness risk limit the annuity purchase, because this contract is usually subject to a liquidity constraint that would prevent the payment of health care expenditures, as illustrated by Davidoff and al. (2005) and Davidoff (2009). In our two-period model, the liquidity constraint does not applied and a complete annuitization of the retirement capital is possible.

With (2.27) and (2.9), the condition for $\overline{Z}_l$ determines the optimal consumption before and after retirement

$$U'(c_1) = \frac{p_i U'(c_2^i) + p_h U'(c_2^h)}{p_i + p_h}, \tag{2.28}$$

leading to $c_2^i < c_1 < c_2^h$. Because the individual chooses a higher amount of annuity to cover part of, but not the whole of, his uncertain LTC expenditures, there is a discontinuity in consumption which depends on the health state. The necessity of providing for the part of the uncovered illness expenses generates a downward jump in case of poor health. On the other hand, a good health would permit a release of the extra savings and an upward jump in consumption. In the absence of the LTC risk ($p_i \rightarrow 0$ or $m \rightarrow 0$), there would be no difference in consumption between both periods.

Finally, despite the welfare gain of annuitization, as shown in Section 2.2.1, the optimality of LTCI means that

$$\overline{V}_l < \overline{V}_c. \tag{2.29}$$

2.4 Imperfect information

Imperfect information may exist when there is heterogeneity in the population. Assuming that a person may either be a high or a low risk on each of the survival and the LTC risks, there may be up to four risk profiles in the population. It means that among people with high survival probability, some are more likely to require LTC, while some others would be healthy enough to live with no care, and *vice versa* for low-survival people.

To support assumptions about the population risk profiles, we refer to studies initiated by Fries (1980), and commented by Kalache and al. (2002), who observe a compression of morbidity in industrialized countries. Observing that age-related illnesses and disabilities mainly occur in the last few years before death, it appears that the extended lifetime translates into an increase in disability-free life expectancy (DFLE). Moreover, this increase may even exceed the gain in life expectancy, thanks to the improving health condition of the elderly.

For instance, Cutler, Ghosh, and Landrum (2013) calculate that the life expectancy and DFLE at age 65 of an American has increased by 0.7 and 1.6 years respectively between 1991 and 2009. Similar trends are observed in France[21] and in UK[22] (see Cambois and al. (2008) and the Office of National Statistics (2005), respectively). In a population where the proportion of elderly in relative good health is growing, these empirical evidences illustrate that a healthier retiree is less likely to require LTC, despite his greater life expectancy.[23] Murtaugh and al. (2001) and Webb (2009) use the same premise.[24]

Accordingly, we restrain our analysis to a population with two risk profiles, where retirees in bad health coexist with retirees in good health. Those that reach

[21] The life expectancy at age 65 for men (women) has increased by 1.3 (1.5) years in the 1990s, while the life expectancy without difficulties for washing and bathing has increased by 2.2 (2.1) years.

[22] Between 1980 and 1998, the increase in life expectancy at age 85 for men (women) was 1.3 (1.5) years, while the increase in DFLE (based on activities of daily living) was 2.2 (2.1) years.

[23] Similarly, Lubitz and al. (1995) calculate that average spending on medical care in the years preceding death decreases with the age of death. For instance, an individual dying at age 101 incurs 37% of the expenses of an individual dying at age 70.

[24] Murtaugh and al. (2001) simulate the insurance market based on the belief that conditions resulting in higher costs for LTC also result in shorter-than-average survival (Murtaugh and al. (1995). The model of Webb (2009), very similar to ours, relies on Lakdawalla and Philipson (2002) who "*document a decline in per capita nursing home output in the US during the 1980s and 1990s, explained by an improvement in the health status of the elderly.*"

retirement in good health, as an effect of genetic inheritance and healthy lifestyle, should live longer and need less LTC, and will be described with the superscript H, whereas the unhealthy retirees, with opposite risk profile, are identified with the superscript U.

Formally, the greater life expectancy of healthy retirees is captured by a higher survival probability :

$$p_h^H + p_i^H > p_h^U + p_i^U. \tag{2.30}$$

In addition, these healthy retirees being less likely to require LTC, they have a lower unconditional probability of illness,

$$p_i^U > p_i^H. \tag{2.31}$$

Inequalities (2.30) and (2.31) mean that p_h^H is sufficiently higher than p_h^U : this is consistent with a gain in DFLE that exceeds the gain in life expectancy for healthy retirees. Furthermore, these inequalities imply a negative correlation of the risk exposures between healthy and unhealthy people within the population. This negative populational correlation reflects the fact that good or bad health has opposite impacts on the risk of survival and the risk of LTC.[25] The negative populational correlation differs from the individual positive correlation identified in Section 2.4.1; the latter recognizes that the need for LTC is conditional on survival. It holds in this section, capturing a globally higher need for LTC when there are more elderly people in a population. To summarize, an unhealthy person is less likely to survive than a

[25] As mentionned, this negative correlation relies on the simultanous improvement in the survival and disability trends, the latter reflecting difficulties in personal care and other daily activities that may require LTC. As mentioned by Cutler, Ghosh, Landrum (2013), the morbidity trend of the elderly is more ambiguous, which may justify, in further research, an assumption of positive populational correlation between morbidity and survival risks.

healthy person; moreover, if both people survive, the unhealthy one is more likely to require LTC. In comparison, Fluet and Pannequin (1997) consider, in a generic context, both positive and negative correlations in risk exposures at the population level, but independent risk distributions at the individual level.

The purchase of insurance occurs before the realization of the risks; buyers then have relevant information on their risks that is hidden to the insurers. With a high survival probability ($p_i + p_h$ high) and a low illness probability (p_i low), a healthy person is at the same time a high annuity risk and a low LTCI risk. An unhealthy person ($p_i + p_h$ low and p_i high) has the opposite risk profile : low annuity risk and high LTCI risk.

This section determines the Nash equilibrium when competitive insurers face adverse selection.[26]. It is assumed that the share of each type of individuals in the population is sufficient to ensure the existence of the equilibrium. The situations where LTCI and annuity exist as the unique insurance tool are examined alternatively; then the section ends with a market insuring both risks.

2.4.1 Long-term care insurance only

When a person $x \in \{H, U\}$,can only insure his LTC risk, his LTCI contract is identified as $\widehat{I}_m^x$, where a '^' indicates the situation of imperfect information. This contract is a vector composed of two elements : the premium σ^x and the quantity $\widehat{q}_m^x$, so that $\widehat{I}_m^x \equiv (\sigma^x, \widehat{q}_m^x)$. Appendix B.2 verified that the single-crossing property is met.

[26]As mentioned by Rothschild and Stiglitz (1976), a Nash equilibrium is defined as a set of contracts that maximize each individual expected utility, while making no losses, and for which there exists no alternative contract that would generate non negative profits.

The lifetime utility of a person x who purchases the contract $\widehat{I}^y_m$ is :

$$v^x\left(\widehat{I}^y_m\right) = \max_R U\left(W - \sigma^y \widehat{q}^y_m - R\right) + \left[p^x_i U(R + \widehat{q}^y_m - m) + p^x_h U(R)\right].$$

The solution to this problem is written $\widetilde{R}^x_m$ when this person considers the contract $\widehat{I}^y_m$, $x \neq y$, and $\widehat{R}^x_m$ when he considers his own contract $\widehat{I}^x_m$ $(x = y)$ The insurance company is aware of this optimization process when determining the menu of contracts $\widehat{I}^x_m$ and $\widehat{I}^y_m$, but the resulting quantity of savings remains private information and as such, it cannot be used as a signal of the person's risk profile.[27]

Look first for a separating equilibrium in a competitive market, the premium is actuarially fair for each individual $x \in \{H, U\}$ and defined by (2.8) as

$$\sigma^x = p^x_i, \tag{2.32}$$

so that $\sigma^H < \sigma^U$. As this premium generates zero-profit on each contract, it leaves the insurer indifferent to the amount of coverage he offers to each individual. Competition between insurers also ensures that the amount $\widehat{q}^x_m$, $x \in \{H, U\}$, maximizes the lifetime value of each individual, subject to the incentive compatibility constraint of the other individual :[28]

$$\widehat{V}^U_m = \max_q v^U\left(\widehat{I}^U_m\right), \tag{2.33}$$
$$\text{subject to } \widehat{V}^H_m \geq v^H\left(\widehat{I}^U_m\right),$$

[27]Bond and Crodker (1991) show that first-best allocation would be achievable under adverse selection if the consumption of products correlated with the level of risk can be used as a signal.

[28]The rationality constraint must also hold, with $\widehat{V}^x_m$ not below the lifetime value when there is no insurance.

and

$$\widehat{V}_m^H = \max_q v^H \left(\widehat{I}_m^H\right), \tag{2.34}$$
$$\text{subject to } \widehat{V}_m^U \geq v^U \left(\widehat{I}_m^H\right).$$

Assume at this stage that the constraint in (2.33) is not binding, and that individual U, being the high-risk insured, has a solution $\widehat{q}_m^U$ equal to the unconstrained amount $\overline{q}_m^U$. It will be verified later that this assumption does not contradict the solution of (2.34).

If the incentive constraint in (2.34) binds, the quantity of insurance for the low-risk insured, $\widehat{q}_m^H$, solves the first-order condition

$$\begin{aligned} &\left\{-\sigma^H U'\left(W - \sigma^H \widehat{q}_m^H - \widehat{R}_m^H\right) + p_i^H U'\left(\widehat{R}_m^H + \widehat{q}_m^H - m\right)\right\} \\ = \ &\lambda^H \left\{-\sigma^H U'\left(W - \sigma^H \widehat{q}_m^H - \widetilde{R}_m^U\right) + p_i^U U'\left(\widetilde{R}_m^U + \widehat{q}_m^H - m\right)\right\}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

where $\lambda^H \geq 0$ is the Lagrange multiplier associated to the constraint.

A left-hand side equal to zero would correspond to the first-order condition of individual H looking for his unconstrained quantity of insurance $\overline{q}_m^H$ when he faces the premium σ^H. Similarly, setting to zero the term between brackets on the right-hand side would determine the hypothetical unconstrained quantity $\overline{q}_m^U\left(\sigma^H\right)$ of individual U who pays the same premium σ^H. Because insurance is an ordinary good, $\overline{q}_m^U\left(\sigma^H\right) > \overline{q}_m^U$. Also, with $\overline{q}_m^H < \overline{q}_m^U$ as a consequence of (2.22), we have $\overline{q}_m^H < \overline{q}_m^U\left(\sigma^H\right)$. Therefore, a binding incentive constraint with a strictly positive λ^H means that there is no solution $\widehat{q}_m^H$ that sets both brackets to zero, though both must have the same sign. Accordingly, a positive left-hand side means that $\widehat{q}_m^H$ is located on the ascending part of the constrained objective function of individual H, so that $\widehat{q}_m^H < \overline{q}_m^H$. However, while $\overline{q}_m^H > m$ under perfect information, both $\widehat{q}_m^H > m$ and $\widehat{q}_m^H < m$ are possible, as can be verified in numerical simulations.

On Figure 2.3, a solution $\widehat{q}_m^H < m < \overline{q}_m^H$ is defined by the intersection of the indifference curve of individual U with the contract line of individual H. The assumption that individual U obtains his unconstraint coverage $\overline{q}_m^U$ implies that his indifference curve remains tangent to his contract line.

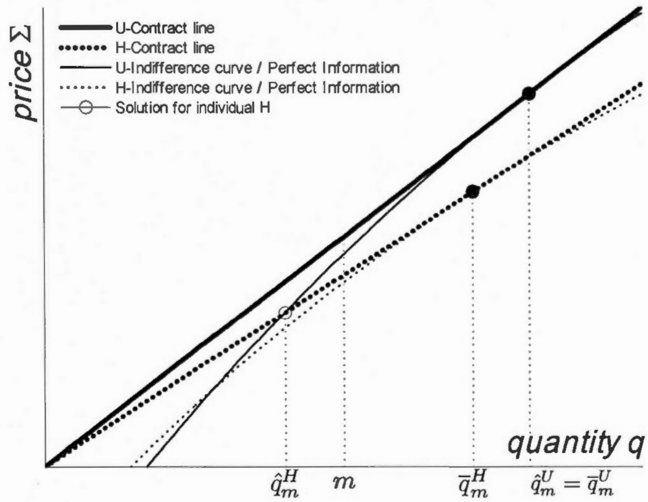

Fig. 2.3 – LTCI only under imperfect information, incentive constraint is binding

Figure 2.4 illustrates another possible solution to (2.34) : when $\overline{q}_m^H$ and $\overline{q}_m^U$ are sufficiently far apart, it is possible that the indifference curve of U intersects the $H-$contract line in-between points, so that $\overline{q}_m^H < \widehat{q}_m^H < \overline{q}_m^U$. The indifference curve of the high-risk person would then require an upward move to reach $\overline{q}_m^H$, meaning that he has no interest in the perfect information contract of the low-risk person. Analytically, the left-hand side of (2.35) would be negative from $\overline{q}_m^H < \widehat{q}_m^H$ while the right-hand side bracket would still be positive from $\widehat{q}_m^H < \overline{q}_m^U < \overline{q}_m^U\left(\sigma^H\right)$, implying $\lambda^H < 0$, a contradiction to the Kuhn-Tucker condition $\lambda^H \geq 0$. This situation requires $\lambda^H = 0$, meaning that the incentive compatibility constraint is not binding.

Consequently, it is possible that the low-risk individual ends up in the situation of perfect information with $\widehat{q}_m^H = \overline{q}_m^H$. This is a case where the distortion from the market incompleteness eliminates the whole information externality. In other words, a wide enough difference between $\overline{q}_m^U$ and $\overline{q}_m^H$ may be used as a revelation mechanism, and a reduction in the low-risk coverage is not required to deter the high-risk person from the lower premium contract. This situation contrasts with the usual result of Rothshild and Stiglitz (1976) because our model permits overinsurance, and because this distortion under perfect information is more important for high-risk people than low-risk people.

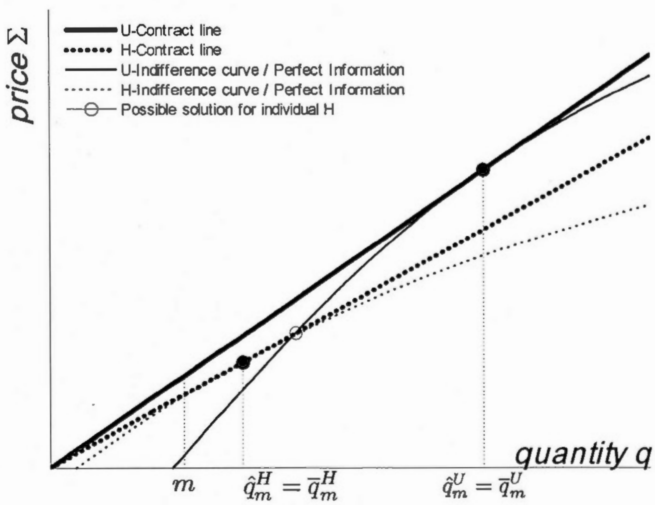

Fig. 2.4 – LTCI only under imperfect information, incentive constraint is not binding

To complete the solution, one must verify that the incentive constraint in (2.33) does not bind, as was assumed initially. As the indifference curve of the healthy individual shifts upward to meet the solution $\widehat{q}_m^H$ illustrated on Figure 2.3, it intersects with the indifference curve of the unhealthy individual on the $H-$contract line. Because the curve of the healthy individual is flatter than the unhealthy individual curve, which is just tangent with the point $\overline{q}_m^U$, the former curve can never reach the unhealthy contract line. In the situation where $\lambda^H = 0$ on Figure 2.4, the indifference curve of the healthy individual remains tangent to his contract line, which is below the unhealthy contract line; consequently, the healthy individual has no interest in the contract of the unhealthy individual either.

In conclusion, when the market offers only LTCI under imperfect information, the solution is a separating equilibrium.[29] The unhealthy individual U (the high risk) obtains the full information-one-market amount of insurance at the actuarial premium, so that $\widehat{I}_m^U \equiv \left(\sigma^U, \widehat{q}_m^U\right)$ is defined by (2.32) and

$$\widehat{q}_m^U = \overline{q}_m^U > m, \tag{2.36}$$

leading to the situation of perfect information for this individual

$$\widehat{V}_m^U = \overline{V}_m^U.$$

On the other side, the contract designed for the healthy individual H (the low risk) $\widehat{I}_m^H \equiv \left(\sigma^H, \widehat{q}_m^H\right)$ is defined by (2.32) and by

$$\begin{aligned} \widehat{q}_m^H &= \overline{q}_m^H > m, \\ \text{or } \widehat{q}_m^H &< \overline{q}_m^H, \text{ with } \widehat{q}_m^H \gtrless m, \end{aligned} \tag{2.37}$$

and generates

$$\widehat{V}_m^H \leq \overline{V}_m^H.$$

[29] Of course, we assume that each parameter value are such as the existence of this equilibrium is ensured. In addition, the argument of Rothshild and Stiglitz (1976) that eliminate the pooling equilibrium also holds when the low-risk person obtains a suboptimal coverage. In the case where both people obtain their perfect information contract, no other contract does better. Therefore, when it exists, the equilibrium is separating.

Consequently, the absence of a moral hazard constraint that permits overinsurance in a zero-profit competitive market is welfare enhancing. First, it leads to the possibility to reach the perfect information situation for both individuals. Otherwise, welfare gain happens through a reduction of the information externality. Indeed, if overinsurance was ruled out on Figure 2.3, the $U-$indifference curve would have to move upward to reach $q = m$ on the $U-$contract line. In turn, this curve would determine $\widehat{q}_m^H$ by intersecting the $H-$contract line at a lower quantity q : this would also require an upward move of the $H-$indifference curve. As an upward move of the indifference curve implies a loss in lifetime value, so would a moral hazard constraint, for both individuals.

2.4.2 Longevity insurance (annuity) only

This subsection will first establish the general conditions for a Nash equilibrium under adverse selection in a market that only insures the longevity risk. The equilibrium will then be characterized in detail.

The annuity contract of an a person $x \in \{H, U\}$ is identified by the vector $\widehat{I_l}^x = (\pi^x, \widehat{a}_l^x)$ built from the premium rate π^x and the life portion $\widehat{a}_l^x$. Given that the property of exclusivity does not hold for this type of contract, as mentioned in Section 2.3.2, both individuals are still free to choose their annuity amount $\widehat{Z}_l^x$, given the parameters of $\widehat{I_l}^x$, in the way they were free to choose their saving $\widehat{R}_m^x$ when there were no annuity. Though the insurer is aware of the optimization process of the insured, he does not observe and control $\widehat{Z}_l^x$, and this amount cannot be used as a signal for the identity of the insured, as it cannot be a parameter of $\widehat{I_l}^x$.

The weighted cost of the annuity is redefined as

$$\pi^a \left(\widehat{a}_l^x\right) = \widehat{a}_l^x \pi^x + \left(1 - \widehat{a}_l^x\right), \tag{2.38}$$

where $\widehat{a}_l^x$ is associated with the premium π^x in $\pi^a(\widehat{a}_l^x)$. Hence, $\pi^a(\widehat{a}_l^x)$ is another way of writing the contract $\widehat{I}_l^x = (\pi^x, \widehat{a}_l^x)$.

A person x with a contract $\widehat{I}_l^y$ has the following lifetime utility

$$v^x\left(\widehat{I}_l^y\right) = \max_Z U(W - \pi^a(\widehat{a}_l^y) Z) + p_i^x U(Z - m) + p_h^x U(Z).$$

As in Subsection 2.4.1, the solution to this problem is written $\widetilde{Z}_l^x$ when this person considers the other person's contract $\widehat{I}_l^y$, $y \neq x$; otherwise, $y = x$ and the person chooses $\widehat{Z}_l^x$ when considering his own contract $\widehat{I}_l^x$.

The insurer chooses $\widehat{a}_l^x$ to maximize the expected lifetime utility of each individual x by taking into account the premium rate π^x associated with the annuity coverage, subject to the incentive constraint. The problem is

$$\widehat{V}_l^x = \max_a v^x\left(\widehat{I}_l^x\right) \tag{2.39}$$
$$\text{subject to } \widehat{V}_l^y \geq v^y\left(\widehat{I}_l^x\right),$$

and subject to the non arbitrage condition (2.7). Because $v^x\left(\widehat{I}_l^x\right)$ strictly decreases in $\pi^a(\widehat{a}_l^x)$ and so, strictly increases in $\widehat{a}_l^x$, the solution $\widehat{a}_l^x$ is a corner solution determined by the first constraint that binds.

The compatibility constraint in (2.39) is developed as

$$\begin{aligned}
&\max_z U(W - \pi^a(\widehat{a}_l^y) Z) + p_i^y U(Z - m) + p_h^y U(Z) \\
\geq\ &\max_z U(W - \pi^a(\widehat{a}_l^x) Z) + p_i^y U(Z - m) + p_h^y U(Z).
\end{aligned}$$

Although the solution $\widehat{Z}_l^y$ on the left-hand side differs from the solution $\widetilde{Z}_l^y$ on the right-hand side, both are optimally chosen by an individual facing the contract $\widehat{I}_l^y$ or $\widehat{I}_l^x$. The unique difference between both sides of the inequality stands in these annuity contracts captured by $\pi^a(\widehat{a}_l^y)$ and $\pi^a(\widehat{a}_l^x)$. Since the lifetime value strictly decreases with this weighted cost, the incentive constraint reduces to $\pi^a\left(\widehat{a}_l^x\right) \geq \pi^a\left(\widehat{a}_l^y\right)$ for $x \neq y$. Consequently, the equilibrium requires that the weighted cost of the annuity be the same for everybody :

$$\pi^a\left(\widehat{a}_l^x\right) = \pi^a\left(\widehat{a}_l^y\right),\ x \neq y.$$

At this point of the development, the level of this weighted cost, as well as its components π^x and $\widehat{a}_l^x$, are not yet defined, and they depend on the type of equilibrium we consider. With a separating equilibrium, each annuitant $x \in \{H, U\}$ pays the fair premium rate

$$\pi^x = p_i^x + p_h^x, \tag{2.40}$$

for the life portion of his contract, with $\pi^H > \pi^U$. The life portion $\widehat{a}_l^x$ will also be specific to each individual, and using (2.38),

$$\widehat{a}_l^U < \widehat{a}_l^H. \tag{2.41}$$

As expected, the healthy individual, with his high-risk profile, would enjoy a higher longevity coverage. Since competition also requires the maximization of each individual lifetime value subject to the non arbitrage constraint $a \leq 1$, individual H is offered complete annuitization with $\widehat{a}_l^H = 1$, as under perfect information. In turn, individual U would received the incomplete coverage $\widehat{a}_l^U = \frac{p_d^H}{p_d^U} < 1$. It means that for each dollar of annuity payment, both annuitants would pay the same cost

$$\pi^a\left(\widehat{a}_l^x\right) = \pi^H,\ x \in \{H, U\}. \tag{2.42}$$

The difference between both contracts is the option of payment upon early death that would be imposed only to the low-risk person.

Consider now the possibility of a pooling equilibrium. It would consist into a unique contract $\widehat{I}_l^P = \left(\pi^P, \widehat{a}_l^P\right)$ offered to everybody. The fair price of the life portion would be defined at the population level as

$$\pi^P = \rho\pi^H + (1-\rho)\,\pi^U, \tag{2.43}$$

where $\rho \in (0,1)$ is the healthy proportion of the population. Given the strictly positive marginal lifetime utility in the life portion $\widehat{a}_l^P$, and given the non arbitrage constraint $a \leq 1$,

$$\widehat{a}_l^P = 1;$$

any other contracts with the premium π^P and a lower coverage would be dominated.

Accordingly, the pooling equilibrium would provide a life only annuity to both types of people, and the weighted unit cost would equal

$$\pi^a\left(\widehat{a}_l^x\right) = \pi^P,\ x \in \{H, U\}. \tag{2.44}$$

Since this weighted cost $\pi^P \in \left(\pi^U, \pi^H\right)$ is lower than the weighted cost (2.42) of the separating equilibrium, it generates a higher lifetime value for everybody. Therefore, the pooling equilibrium strictly dominates the separating equilibrium.

Obviously, the premium (2.43) ensures that the contract $\widehat{I}_l^P$ generates no loss. This contract will constitute the resulting equilibrium if we also verify that there exists no other contract that would be profitable : this condition is not usually met when the insurance contract is generic and exclusive, such as the LTCI contract. Indeed, when we consider a pooling equilibrium for an exclusive contract, it is always possible to find an alternative contract that still make profits by only attracting low-risk people : this alternative contract is built from a slightly lower premium and a reduced coverage that does not interest high-risk people who have higher marginal utility of insurance. With the non exclusive annuity contract, an alternative contract must have a weighted unit cost below π^P to attract low-risk people; (the respective levels of π and a does not matter, as long as they met the condition $\pi^a(a) < \pi^P$). However, such contract would also be purchased by high-risk people and would thus be loss-making. Consequently, no alternative pooling contract exists so that contract $\widehat{I}_l^P$ is the sole feasible pooling contract, and it dominates the separating contract.

The fact that the equilibrium involves pooling is further explained by the non exclusive nature of the contract where the pricing dimensions are defined by the life portion of the annuity, and by the unit price of this portion. Although an increase in the life portion induces a lower payment in the event of premature death, it does not impact the payment in the opposite event of survival, that is the bad state of nature. Therefore, the dimension, captured by the life portion of the contract, does not directly modify the individual lifetime value in the absence of a bequest motive. However, since it indirectly modifies the lifetime value through a decrease in the weighted annuity cost, which acts as the cost of transferring wealth between periods, it leads to the corner solution of a complete annuitization. Consequently, the life portion dimension cannot incite annuitants to self-select their own risk category, and the market equilibrium is characterized by linear pricing with the price of the life coverage as the unique dimension.

Finally, compared with the perfect information situation, the pooling equilibrium involves a subsidy from the low-risk to the high-risk annuitant (from $\pi^U < \pi^P < \pi^H$), such as it makes the low-risk annuitant worse-off, but improves the situation of the high-risk annuitant ; formally,

$$\begin{aligned} \widehat{V}_l^U &< \overline{V}_l^U \\ \widehat{V}_l^H &> \overline{V}_l^H. \end{aligned}$$

2.4.3 Complete insurance markets

A complete market insures all the risks a person may face. Two configurations of this market will be presented below. First, each person purchases a portfolio of single-risk contracts with two distinct insurers; each insurer is aware that his customer purchases a second contract, though he does not observe the features of this contract.[30] The resulting equilibrium and welfare will be compared with those of a menu of comprehensive contracts, the bundled contracts, each covering both the longevity and the LTC risks. Since the portfolio of single-risk contracts and the bundled contract generate different levels of welfare, they may not coexist in the same market.

Under adverse selection, Fluet and Pannequin (1997) show that bundling coverages in a unique contract reduces the information externality, and thus provides higher welfare, as it exploits the negative correlation in the population risk exposures. In contrast, a customer choosing a single-risk contract among a menu of contracts cannot signal his risk profile to the insurer selling the second single-risk contract.[31] Webb (2009) obtains similar results with the same risks as ours. In both papers, the coverages are exclusive and result in separating equilibriums, whether

[30] It can also be one company operating in many lines of business, but with separate departments sharing few information.

[31] Fluet and Pannequin (1997) also consider the intermediate situation of single-risk contracts where insurers share information about the contracts they sold. When the population risk exposures are negatively correlated, the allocation and welfare are the same than with bundled contracts. With positive correlation, this intermediate situation does better than the single-risk contracts with no information sharing, still due to the lower number of incentive constraints; however, it is suboptimal compared to the bundling situation since it imposes more restrictions on the amount of insurance.

the risks are insured separately or bundled in a unique contract.[32] Finally, Spillman, Murtaugh, and Warshawsky (2001) simulate that bundling a LTC coverage within an annuity contract attenuates the selection issue on LTCI, making this coverage available to more people.

One result developed in the rest of this paper shows that the non-exclusive feature of the annuity contract, that leads to the pooling equilibrium in a single-risk context, may contradict the welfare gains associated to bundling.

Single-risk contracts

An individual $x \in \{H, U\}$ builds a portfolio of contracts $\widehat{I}^x_{cm} = (\sigma^x, \widehat{q}^x_c)$ and $\widehat{I}^x_{cl} = (\pi^x, \widehat{a}^x_c)$, and chooses his optimal amount of annuity $\widehat{Z}^x_c$ accordingly. Subscript c refers to a complete market offering LTCI and annuity contracts separately.

An insurer neither observe the risk profile of his own customers, nor $\widehat{Z}^x_c$, but he knows how the other line of business operates and how customers make decisions. For example, when a LTC insurer designs a contract for high-risk customers, he is aware that these customers are low-risk customers in the annuity market.

The lifetime utility of the individual x if he buys, say, the LTCI contract built for y and the annuity designed for x is

$$v^x\left(\widehat{I}^y_{cm}, \widehat{I}^x_{cl}\right) = \max_Z U\left(W - \sigma^y \widehat{q}^y_c - \pi^a\left(\widehat{a}^x_c\right) Z\right) + p^x_i U\left(Z + \widehat{q}^y_c - m\right) + p^x_h U\left(Z\right),$$

where $\pi^a\left(\widehat{a}^x_c\right)$ is the weighted annuity premium, as defined in (2.38).

[32] In Webb (2009), the population presents heterogeneity in both risk aversion and risk level, so that double-crossing is possible under some circumstances. It may result a partial-pooling equilibrium, characterized by complete coverage for part of high-risk insureds, the rest being pooled with all low-risk insureds.

The problem is solved for one risk, taking into account the contract on the second risk. The optimized lifetime value of the individual $x \neq y$ is

$$\widehat{V}_c^x = \max_{q,a} v^x \left(\widehat{I}_{cm}^x, \widehat{I}_{cl}^x \right), \tag{2.45}$$

subject to the incentive compatibility constraint of the LTC insurer

$$\widehat{V}_c^y \geq v^y \left(\widehat{I}_{cm}^x, \widehat{I}_{cl}^y \right), \tag{2.46}$$

as well as to the incentive compatibility constraint of the annuity provider

$$\widehat{V}_c^y \geq v^y \left(\widehat{I}_{cm}^y, \widehat{I}_{cl}^x \right), \tag{2.47}$$

and to the no-arbitrage constraint $\widehat{a}_c^x \leq 1$.

As in Problem (2.39), Constraint (2.47) is developed as

$$\begin{aligned} & \max_z U\left(W - \sigma^y \widehat{q}_c^y - \pi^a\left(\widehat{a}_c^y\right) Z\right) + p_i^y U\left(Z + \widehat{q}_c^y - m\right) + p_h^y U\left(Z\right) \\ \geq \ & \max_z U\left(W - \sigma^y \widehat{q}_c^y - \pi^a\left(\widehat{a}_c^x\right) Z\right) + p_i^y U(Z + \widehat{q}_c^y - m) + p_h^y U\left(Z\right). \end{aligned}$$

The sole difference between both sides of the inequality is the weighted annuity cost $\pi^a\left(\widehat{a}_c^x\right)$; everything else is identical, including the LTCI contract. In consequence, the optimal annuity contract that meets the Nash equilibrium definition is determined as in Problem (2.39) and both people obtain the same pooling contract. Formally, for $x \in \{H, U\}$,

$$\widehat{I}_{cl}^x = \left(\pi^P, \widehat{a}_l^P = 1\right),$$

where π^P is defined by (2.43). Therefore, both pay the weighted annuity cost

$$\pi^a\left(\widehat{a}_c^x\right) = \pi^P, \ x \in \{H, U\}.$$

From $\pi^U < \pi^P < \pi^H$, there is a subsidy from the unhealthy person to the healthy person. Non exclusivity implies that the unhealthy person purchases less annuity than it would be optimal under perfect information, and his longevity risk is only partially covered. In comparison, the healthy person will select an amount higher than optimal, and benefits from better condition to cover his longevity risk than under perfect information : his situation can be likened to a situation of overinsurance.

For his part, the LTC insurer is aware that all his insureds purchase the pooling annuity contract. He faces a problem similar to the insurer in Subsection 2.4.1, where the absence of coverage against the longevity risk can be seen as a special case of the imperfect coverage just calculated here. A separating equilibrium with no subsidy between individuals can then be characterized as it was done in the absence of coverage against the longevity risk,, with the fair premium σ^x defined by (2.32) ; the cost of transferring wealth from the first to the second period, that decreases from 1 to π^P, is the sole difference between both problems.

How does the distortion in the annuity contract impacts the desired amount of LTCI, given the positive correlation of the individual probability distributions ? Formally, given $\sigma^x = p_i^x$ and the weighted cost of annuity $\pi^P < 1$, a person $x \in \{H, U\}$ may calculate an unconstrained amount of LTCI (together with his annuity amount), with the condition

$$U'(c_1) = U'(c_2^i) = \frac{p_h^x}{\pi^P - p_i^x} U'(c_2^h). \tag{2.48}$$

Given $\frac{p_h^U}{1-p_i^U} < \frac{p_h^U}{\pi^P - p_i^U} < 1$ and the concavity of the utility function, the unhealthy individual would choose a LTCI amount falling between the $\overline{q}_c^U = m$ defined by (2.15) and $\overline{q}_m^U > m$ defined by (2.19) . While the distortion $\overline{q}_m^U - m$ was generated by the absence of annuity, the coverage of the longevity risk reduces this distortion. However, since the coverage is partial, the distortion in LTCI cannot be totally eliminated. Moreover, a bigger difference between the fair premiums π^U and π^P leads to a smaller reduction in the distortion : this is the case if the survival probabilities of each person tend to be far from each other, or if there is an important proportion of healthy people in the population.

The unhealthy individual being a high risk for the LTC insurer, his coverage $\widehat{q}_c^U$ is unconstrained and defined by (2.48), so that

$$m = \overline{q}_c^U < \widehat{q}_c^U < \overline{q}_m^U = \widehat{q}_m^U. \tag{2.49}$$

On the other side, $\frac{p_h^H}{1-p_i^H} < 1 < \frac{p_h^H}{\pi^P - p_i^H}$ in (2.48) means that the healthy individual would also choose a LTCI amount below $\overline{q}_m^H > m$, but also below $\overline{q}_c^H = m$. Unlike the unhealthy person, his longevity coverage is more advantageous than under perfect information, and the distortion in the desired amount of LTCI goes in the opposite direction.[33]

$$\widehat{q}_c^H < \overline{q}_c^H = m < \overline{q}_m^H; \tag{2.50}$$

However, as in Subsection 2.4.1, two situations may lead to $\widehat{q}_c^H < m$. In the first one, as illustrated in Figure 2.5, the incentive constraint (2.46) binds and $\widehat{q}_c^H$ is constrained. It is also possible that the constraint does not bind, with the $U-$indifference curve intersecting the H-contract line between $q_c^H < m$ and $\widehat{q}_c^U$: this is the case where the possibility of overinsurance for the high-risk eliminates the information externality on the low-risk : the healthy person would then benefits from his unconstrained coverage of LTCI.

To understand graphically the resulting equilibrium in Figure 2.5, the combination of the property $\left.\frac{d^2\Sigma}{dq d\pi^a}\right|_{dV=0} > 0$ of Subsection 2.3.1 with $\pi^P < 1$ generates a

[33]However, as in the case of the unhealthy person, the LTCI amount would tend toward $\overline{q}_c^H$ if the difference between π^H and π^P were small.

flatter $U-$indifference curve than the curve with no annuitization. Therefore, this curve intersects the $H-$contract line at a lower value of q.

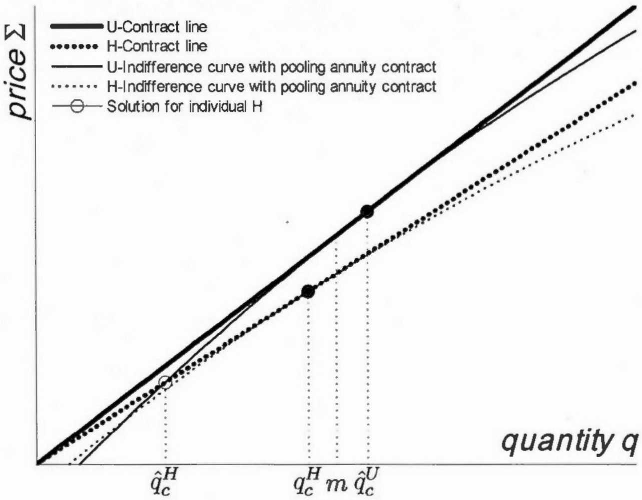

Fig. 2.5 – Complete market under imperfect information : Single-risk contracts (q_c^H is constrained)

To summarize, the unhealthy person subsidizes healthy annuitants, but he is not penalized on his LTCI coverage, due to his high-risk status, and to the absence of overinsurance constraint. Compared to his situation in a complete market under perfect information, his suboptimal situation is due to his low-risk status in the annuity market :

$$\widehat{V}_c^U < \overline{V}_c^U.$$

The healthy person benefits from a subsidy on his annuity, generated by the presence of the unhealthy person in the market. He may also incur an information externality on his LTCI contract, still generated by the unhealthy person, though the externality is lower when the distortion in the unhealthy's amount is bigger. If the information externality exists, its negative impact on the welfare may be higher or lower than the positive effect of the annuity subsidy. Therefore, asymmetric information in a complete single-risk market is not necessarily detrimental to the welfare of the healthy person, and as in the situation of a market insuring only the longevity risk, it may even improve his situation :

$$\widehat{V}_c^H \gtrless \overline{V}_c^H.$$

One peculiarity of our outcomes is the separating and pooling equilibriums that coexist under adverse selection when insurers operate in parallel. This peculiarity results from the non exclusivity of the annuity contracts, a characteristic not usually taken into account in the ageing insurance literature (e.g. Webb, 2009). We also note that if there is only a small difference between the survival probabilities of both types of insureds, the pooling annuity contract would create less distortion, as it would involve a lower subsidy. The characterization of the menu of contracts for LTCI would then be closer to the classic model of Rothshild and Stiglitz (1976), save for the absence of a moral hazard constraint.

In both Fluet and Pannequin (1997) and Webb (2009), the equilibrium with single-risk contracts sold in parallel corresponds to what would be obtained with two distinct single-risk problems, because the distortion in one market does not affect the other market equilibrium. Our contrasting outcomes, where a healthy person may gain from asymmetric information, comes from two features of our model, together with the subsidized annuity. The first one is the positive correlation in the individual probability distributions, absent in Fluet and Pannequin (1997), that generates the distortion in the unconstrained amount of insurance. The second one is the absence of a moral hazard constraint, unlike Fluet and Pannequin (1997) as well as Webb (2009), which implies that does overinsurance is not ruled out. These features reduce, and may even eliminate, the information externality incurred by the healthy person on LTCI. In addition, the possibility of overinsurance is beneficial to the unhealthy person as it compensates the lack of coverage on the longevity risk, as in Section 2.4.1.

Multiple-risk contract

A multiple-risk contract bundles in a unique contract an insurance coverage against each risk. As before coverage of the longevity risk is not exclusive. The person $x \in \{H, U\}$ can choose $\widehat{Z}_b^x$, given his insurance contract $\widehat{I}_b^x$, where the subscript b identifies a market offering bundled contracts. The longevity part of this contract will be captured by the life portion $\widehat{a}_b^x$ and the unit premium π^x for this life portion. The LTC part remains exclusive, with premium σ^x and quantity $\widehat{q}_b^x$. Therefore, our multiple-risk contract $\widehat{I}_b^x = (\widehat{\sigma}^x, \widehat{q}_b^x, \widehat{\pi}^x, \widehat{a}_b^x)$ contrasts with those developed in previous literature, as we bundle two coverages that presented very distinct designs in the single-risk context : an exclusive coverage leading to a separating equilibrium for the LTC part, and a non exclusive coverage leading to a pooling equilibrium for the longevity part.

The contract designed for individual y generates the following lifetime utility to individual x :

$$v^x\left(\widehat{I}_b^y\right) = \max_Z U\left(W - \widehat{\sigma}^y \widehat{q}_b^y - \pi^a\left(\widehat{a}_b^y\right)Z\right) + p_i^x U\left(Z + \widehat{q}_b^y - m\right) + p_h^x U\left(Z\right),$$

where $\pi^a\left(\widehat{a}_b^y\right)$ is the weighted annuity premium, as defined in (2.38). This individual chooses $\widehat{Z}_b^x$ if he purchases his own contract $\widehat{I}_b^x$, or $\widetilde{Z}_b^x$ if he cheats by purchasing the contract $\widehat{I}_b^y$ built for y.

Now consider the possibility of pooling the longevity part of $\widehat{I}_b^x$. The LTCI components would become the unique discriminatory parameters of the contract, and the problem would be similar to the problem of two single-risk contracts sold in parallel, as discussed above. As above pooling the LTCI component of the contract would not produce an equilibrium for the same reason that a pooling equilibrium for a LTCI sold in isolation does not exist. Consequently, the market equilibrium of bundled contracts under adverse selection will be separating.

A separating equilibrium requires that each contract generates zero profits, which excludes subsidy between individuals. At this point, we may not force the premium rates $\widehat{\sigma}^x$ and $\widehat{\pi}^x$ to be defined by (2.32) and (2.40), and we consider the possibility of subsidy between the coverages of an individual contract. The insurer budget constraint would then be, for $x \in \{H, U\}$,

$$\widehat{\sigma}^x \widehat{q}_b^x + \widehat{\pi}^x \widehat{a}_b^x \widehat{Z}_b^x = p_i^x \widehat{q}_b^x + (p_i^x + p_h^x) \widehat{a}_b^x \widehat{Z}_b^x. \tag{2.51}$$

However, the fair premiums (2.32) and (2.40) are valid candidates for $\widehat{\sigma}^x$ and $\widehat{\pi}^x$ in (2.51). Moving away from fair definition means that an increase of $d\sigma$ in σ^x implies a decrease of $d\pi$ in π^x, or *vice versa,* such that

$$\widehat{q}_b^x d\sigma - \widehat{a}_b^x \widehat{Z}_b^x d\pi = 0, \tag{2.52}$$

are required to respect (2.51). Using the envelop theorem, an increase of $d\sigma$ decreases the person welfare as

$$\frac{\partial \widehat{V}_b^x}{\partial \sigma^x} = -\widehat{q}_b^x U'(c_1)\, d\sigma, \tag{2.53}$$

while an increase $d\pi$ gives

$$\frac{\partial \widehat{V}_b^x}{\partial \pi} = -\widehat{a}_b^x \widehat{Z}_b^x U'(c_1)\, d\pi. \tag{2.54}$$

Together, (2.53) and (2.54) mean that a change respecting (2.52) would have no impact on the welfare, as

$$-\widehat{q}_b^x U'(c_1)\, d\sigma^x + \widehat{a}_b^x \widehat{Z}_b^x U'(c_1)\, d\pi = \left[-\widehat{q}_b^x d\sigma^x + \widehat{a}_b^x \widehat{Z}_b^x d\pi\right] U'(c_1)$$

equals zero from (2.52). Since there is no welfare gain in moving away from the fair pricing specific for each risk, the solution cannot do better than using this premium definition, and

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}^x &= \sigma^x, \\ \widehat{\pi}^x &= \pi^x.\end{aligned} \tag{2.55}$$

Therefore, a competitive insurer maximizes the lifetime value of each person $x \in \{H, U\}$ as

$$\widehat{V}_b^x = \max_{q,a} v^x \left(\widehat{I}_b^x\right), \tag{2.56}$$

subject to the single incentive constraint

$$\widehat{V}_b^y \geq v^y \left(\widehat{I}_b^x\right), \tag{2.57}$$

and subject to the non-arbitrage constraint $\widehat{a}_b^x \leq 1$. This problem is similar to (2.45), except that the bundling of both coverage within a unique contract reduces the number of incentive constraints : each person must meet the unique constraint (2.57) instead of (2.46) and (2.47).

The Lagrangian of each problem is

$$\mathcal{L}^x = v^x \left(\widehat{I}_b^x\right) + \lambda^x \left[\widehat{V}_b^y - v^y \left(\widehat{I}_b^x\right)\right] + \mu^x \left[1 - \widehat{a}_b^x\right].$$

The quantity $\widehat{q}_b^x$ and the proportion $\widehat{a}_b^x$ are determined respectively by the first-order condition

$$\frac{\partial v^x \left(\widehat{I}_b^x\right)}{\partial \widehat{q}_b^x} - \lambda^x \frac{\partial v^y \left(\widehat{I}_b^x\right)}{\partial \widehat{q}_b^x} = 0 \tag{2.58}$$

and

$$\frac{\partial v^x \left(\widehat{I}_b^x\right)}{\partial \widehat{a}_b^x} - \lambda^x \frac{\partial v^y \left(\widehat{I}_b^x\right)}{\partial \widehat{a}_b^x} - \mu^x = 0. \tag{2.59}$$

Besides, the Lagrange multipliers must meet $\lambda^x \geq 0$ and $\mu^x \geq 0$ for $x \in \{H, U\}$.

Based on the Kuhn-Tucker conditions, distinct cases may happen. First, we cannot exclude the case $\lambda^U = \lambda^H = 0$ where no incentive constraint binds. For $x \in \{H, U\}$, it would lead to $\mu^x > 0$, so that $\widehat{a}_b^x = \overline{a}_c^x = 1$, and $\widehat{q}_b^x = \overline{q}_c^x = m$: both individuals would achieve their situation of perfect information. This is a consequence of the negative correlation in risk exposures, where the advantage of being high-risk on one coverage balances out the disadvantage of being low-risk on the other coverage.

In a second case, the incentive constraint binds only for the person x ($\lambda^x > 0$, $\lambda^y = 0$, $x \neq y$), and the person y obtains his unconstrained amount of LTCI. Because $\lambda^y = 0$ implies $\mu^y > 0$, then $\widehat{a}_b^x = 1$ comes with $\widehat{q}_b^y = m$. This person is considered as the global high risk, despite that he is low-risk for one of the coverage, and he obtains his perfect information coverage on both risks.

For his part, the person x is globally the low risk in this market, and his constrained bundled contract may take diverse forms. Because $\frac{\partial v^x(\widehat{I}_b^x)}{\partial \widehat{a}_b^x}$, $\frac{\partial v^y(\widehat{I}_b^x)}{\partial \widehat{a}_b^x}$, and λ^x are all strictly positive in (2.59), we may have $\mu^x = 0$ or $\mu^x > 0$: a constrained coverage $\widehat{q}_b^x$ does not necessarily imply a reduction in the annuity coverage, as it is compatible with both $\widehat{a}_b^x < 1$ and $\widehat{a}_b^x = 1$. We note, however, that the inverse is not true, since $\mu^x = 0$ requires that $\lambda^x > 0$: a suboptimal annuity coverage $\widehat{a}_b^x < 1$ implies a suboptimal LTC coverage $\widehat{q}_b^x$. In other words, the insurer must penalize the LTC coverage before considering the reduction in the longevity coverage. The fact that LTCI is payable only to ill retirees while an annuity provides resources in two states of nature explains the priority given to the latter risk.

Given the difference in the design of the coverages, particularly with the respect of the exclusivity property and the overinsurance constraint, the design of the low-risk contract $\widehat{I}_b^x$ will vary with the identity of the low-risk person. Generally speaking, a large difference in the survival probabilities ($\left(p_i^H + p_h^H\right) - \left(p_i^U + p_h^U\right)$ large) implies a small difference in the LTC probabilities : the longevity risk is then more likely to dominate, making the healthy person the high-risk type. Inversely, a large difference in the unconditional LTC probabilities ($p_i^U - p_i^H$ large) means a small difference in the survival probabilities, and the high-risk type will tend to be the unhealthy person. Similarly, a large lost m compared to W makes more likely to see the unhealthy person be the high risk.

Let the incentive constraint bind only for the healthy person ($\lambda^H > 0$, $\lambda^U = 0$), so that he is the low risk, with the unhealthy person reaching his perfect information situation. In the case where $\mu^H > 0$, $\widehat{a}_b^H = 1$, the weighted annuity premium is $\pi^a\left(\widehat{a}_b^H\right) = \pi^H$. Compared to the pooling annuity premium of the single-risk context, this high annuity premium π^H relieves some pressure from the incentive constraint, and $\widehat{q}_b^H$ does not need to be reduced as much as $\widehat{q}_c^H$.[34]

In Figure 2.6, the perfect information contract of the unhealthy person is illustrated by his indifference curve (with the weighted annuity premium set to π^U) being tangent to his contract line where the LTCI coverage is complete ($\widehat{q}_b^U = m$). Similarly, $\widehat{a}_b^H = 1$ means that the unconstrained LTCI of the healthy person would equal m. Without bundling, his constrained coverage would be defined by the intersection of the $U-$indifference curve with the $H-$contract line, when type U pays his own weighted annuity premium. However, bundling means that the unhealthy person must accept the high weighted annuity premium π^H to benefit from the low LTCI premium σ^H. Paying π^H instead of π^U is equivalent to a suboptimal annuity coverage, and the $U-$indifference curve moves downward; this is opposite of the

[34]It is even possible that no reduction is required in $\widehat{q}_b^H$: this brings us back to the first case.

increase in annuity coverage illustrated in Figure 2.2. The solution $\widehat{q}_b^H$ is then determined by the intersection of the $H-$contract line with the $U-$indifference curve that takes into account the annuity premium.

Figure 2.6 also shows that a bigger difference between the weighted annuity premiums would move the $U-$indifference curve further down, with the possibility of intersecting the $H-$contract line to the right of m : this would correspond to $\lambda^H = 0$, which is the case where both people obtain their perfect information contract.

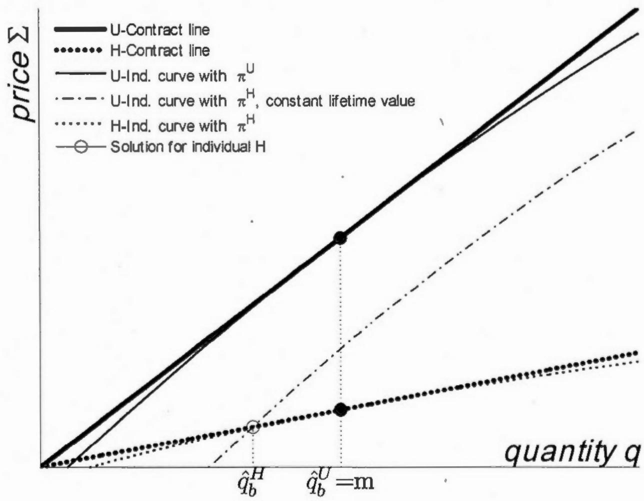

Fig. 2.6 – Complete market under imperfect information : Multiple-risk contracts, individual H is the low risk ($\widehat{a}_b^H = 1$)

Briefly looking at the situation where $\lambda^H > 0$ and $\mu^H = 0$, we would have $\widehat{a}_b^H < 1$. This situation happens if the healthy person is almost certain to survive, triggering a fair premium π^H close to one; he does not have much to loose with a reduced annuity coverage. In addition, the $U-$indifference curve would also move further than what illustrated on Figure 2.6, and the penalty imposed on $\widehat{q}_b^x$ would be smaller.

Now, consider that the low-risk type is the unhealthy person ($\lambda^U > 0$, $\lambda^H = 0$), and that the healthy person obtains a perfect information contract. When $\mu^U > 0$, $\widehat{a}_b^U = 1$, the unconstrained LTC coverage of the unhealthy person equals m. Compared to the pooling annuity of the single-risk market, this person benefits from a perfect annuity coverage at the weighted cost of π^U. However, since this π^U is appealing to individual H who pays π^H, $\widehat{q}_b^U$ cannot equal m. Given that the individual U has a higher marginal utility of LTCI, it is easier to respect the incentive constraint, and less damaging to individual U, if the penalty on LTCI consists in an increase in the coverage, rather than a decrease. Therefore, $\widehat{q}_b^U > m$, which is also made possible by the absence of moral hazard constraint.

This unusual solution appears in Figure 2.7, where the perfect information situation of the healthy person is illustrated by the tangency point of his indifference curve on his contract line. Cheating to pay the lower weighted annuity premium π^U would be equivalent to an improved annuity coverage : this would move his indifference curve upward (in contrast with the downward move in Figure 2.6), which would intercept the $U-$contract line at the solution $\widehat{q}_b^U > m$. At this point, the healthy person is indifferent between his own contract and the other person's contract. We see that a lower $\widehat{q}_b^U$ would imply a downward move of the $H-$indifference curve with π^U, and so, a welfare gain, which would contradict the incentive constraint.

This figure also shows the welfare gain generated by the absence of moral hazard constraint. With no LTC overinsurance, the only way to divert the healthy person from $\widehat{I}_b^U$ would be a less advantageous annuity coverage for the unhealthy person : an incomplete annuity would make $\pi^a\left(\widehat{a}_b^U\right)$ closer to π^H, which would be more harmful to the unhealthy person than the distortion in the LTC coverage.

Still in the case where $\lambda^U > 0$, $\lambda^H = 0$, an important difference in the survival

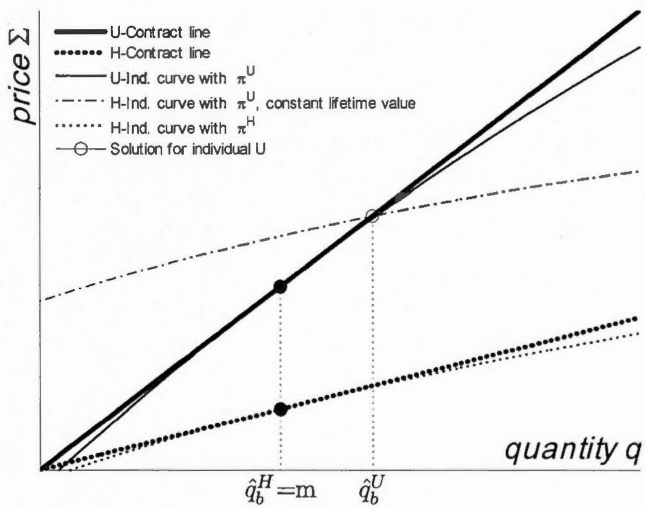

Fig. 2.7 – Complete market under imperfect information : Multiple-risk contracts, individual U is the low risk $(\widehat{a}_b^U = 1)$

probabilities would make π^U very attractive to the healthy person, despite the higher LTCI premium : in Figure 2.7, his indifference curve would move very high on the $U-$contract line. To divert him from the contract $\widehat{I}_b^U$ without imposing a too big penalty on $\widehat{q}_b^U$, an increase in the weighted annuity premium $\pi^a\left(\widehat{a}_b^U\right)$ would be required through a reduction in the annuity coverage $\widehat{a}_b^U < 1$. This higher $\pi^a\left(\widehat{a}_b^U\right)$ would then reduce the jump of the $H-$indifference curve to a $\widehat{q}_b^U$ lower than the coverage required if $\widehat{a}_b^U = 1$ was kept.

We may summarize these different cases as follow :[35]

$$
\begin{aligned}
If\ \lambda^x &= 0,\ x \in \{H, U\} \\
&\Rightarrow\ \widehat{I}_b^x = (\sigma^x, \widehat{q}_b^x = m, \pi^x, \widehat{a}_b^x = 1). \\
&\Rightarrow\ \widehat{V}_b^x = \overline{V}_c
\end{aligned} \tag{2.60}
$$

$$
\begin{aligned}
If\ \lambda^U &= 0,\ \lambda^H > 0 \\
&\Rightarrow\ \widehat{I}_b^U = \left(\sigma^U, \widehat{q}_b^U = m, \pi^U, \widehat{a}_b^U = 1\right), \\
&\Rightarrow\ \widehat{I}_b^H = \left(\sigma^H, \widehat{q}_b^H < m, \pi^H, \widehat{a}_b^H \leq 1\right),
\end{aligned} \tag{2.61}
$$

where $\widehat{a}_b^H < 1$ is more likely when $p_i^H + p_h^H$ is close to one, and

$$
\begin{aligned}
\widehat{V}_b^U &= \overline{V}_c^U, \\
\widehat{V}_b^H &< \overline{V}_c^H.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
If\ \lambda^U &> 0,\ \lambda^H = 0 \\
&\Rightarrow\ \widehat{I}_b^U = \left(\sigma^U, \widehat{q}_b^U > m, \pi^U, \widehat{a}_b^U \leq 1\right), \\
&\Rightarrow\ \widehat{I}_b^H = \left(\sigma^H, \widehat{q}_b^H = m, \pi^H, \widehat{a}_b^H = 1\right).
\end{aligned} \tag{2.62}
$$

[35] A last case results from the non exclusive feature of the longevity coverage, which permits a person to adjust his annuity amount to take advantage of the conditions of each contract offered in the market. For instance, if the healthy person considers the contract of the unhealthy person, the low annuity premium will allow a higher annuity amount, which will be beneficial to him. It is then possible that each person prefers the first-best contract of the other person, with both incentive constraints binding ($\lambda^U > 0$ and $\lambda^H > 0$), and nobody would achieve his first-best situation : $\widehat{V}_b^x < \overline{V}_c^x,\ x \in \{H, U\}$.

where $\widehat{a}_b^U < 1$ is more likely when the difference between $p_i^H + p_h^H$ and $p_i^U + p_h^U$ is large, and

$$\begin{aligned} \widehat{V}_b^U &< \overline{V}_c^U, \\ \widehat{V}_b^H &= \overline{V}_c^H. \end{aligned}$$

We note that the sign of the distortion in LTC coverage depends on the identity of the low-risk person ($\widehat{q}_b^U > m$ or $\widehat{q}_b^H < m$), as a consequence of the absence of moral hazard constraint. In previous literature on multiple-risk insurance, the globally low-risk person sees the coverage on which he is high risk limited to the amount of potential lost.

However, the possibility of LTC overinsurance generates an advantage only when the unhealthy person is globally the low risk, and only to this person. This result contrasts with the situation of single-risk contracts where the absence of a moral hazard constraint makes both individuals better off.

Finally, compared to a market offering single-risk annuity contracts, whether as the unique market or in parallel with a LTCI market, a bundled contract allows the pricing of the annuity to be separating. Therefore, when the unhealthy person achieves the perfect information allocation within the bundle contract, he is always better off than in the situation of two single-risk contracts : he avoids subsidizing the annuity component while reaching the unconstrained level of LTCI. However, this is not necessarily true for the healthy person : the subsidized longevity coverage that he obtains in a market of single-risk contracts may advantageously compensate a constrained LTCI. This result contradicts the conclusion of previous literature on multiple-risk insurance about the welfare gains associated to bundling; it is a consequence of the non-exclusivity feature of the annuity contract, that leads to a pooling equilibrium in a single-risk context.

2.5 Conclusion

This paper analyzed the interaction between two imperfections (adverse selection and market incompleteness) in a competitive insurance market facing two risks related to aging : the longevity risk and the risk of long-term care (LTC). The two risks present a specific correlation structure : a positive correlation of the probability distribution of the risks at the individual level, and a negative correlation of the risk exposure at the population level

This kind of framework was studied by other authors. With generic risks, Fluet and Pannequin (1997) ruled out the individual correlation by assuming the independence of the probability distribution, but as they did not focus on specific types of risks, they looked at both positive and negative correlation within the population. Webb (2009) considered the same risks as us, with a generalization of some assumptions, and restrictions on other assumptions. Compared to these papers, our study recognizes that the property of exclusivity does not apply to an annuity contract, in accordance with empirical evidence. It also relaxes the moral hazard constraint on LTC coverage in conformity with the nature of the risk.

By considering incomplete market first, under perfect and imperfect information alternatively, we are able to identify how a missing coverage modifies the demand for coverage on the other risk. Under adverse selection, the absence of coverage on the longevity risk causes a distortion in LTC coverage that attenuates, and may even eliminate, the need for an incentive constraint. Indeed, the mere difference in distortions between types may be sufficient to induce self-selection. This outcome relies on the positive correlation at the individual level that generates the distortion, and on the absence of moral hazard constraint that does not eliminate this distortion.

Compared to a generic insurance model, it is easy to see that non exclusivity in our annuity model has no consequence on the resource allocation and the welfare under perfect information. However, it modifies the design of the incentive contract under adverse selection. It prevents the use of coverage quantity as one dimension in a two-dimensional incentive menu. Mimicking what appears to be standard practice in reality, our incentive contract specifies payment to the estate in lieu of annuity amount to capture the extent of the coverage provided by the contract. In the absence of bequest motive, this feature impacts the lifetime utility only indirectly, through the unit price of the annuity, which limits its power to provide incentives. Therefore, our annuity market exhibits a pooling equilibrium with linear pricing. Since this contract involves a subsidy from low-risk to high-risk annuitants, it makes the latter better off than under perfect information.

The pooling equilibrium in annuity is obtained whether longevity insurance is the unique insurance market, or coexists with a LTCI market, provided that both markets coexist with no information sharing between insurers. While Fluet and Pannequin (1997) and Webb (2009) replicate the standard single-risk outcomes with these separate markets, we obtain the same equilibriums, but with a different allocation. This is because the presence of the annuity, even imperfectly, modifies the distortion in the unconstrained LTC coverage, and thus, the allocation under adverse selection. Indeed, the distortion caused by the absence of annuity could be seen as a special case of the distortion generated by the imperfect coverage of the complete market.

However, when both coverages are bundled into a unique contract, separation of the annuity pricing becomes possible. In the resulting separating equilibrium, the healthy person looses the advantage of the subsidized annuity that he enjoyed in the pooling equilibrium when both markets operate in isolation. This type may be worse off than in a complete market with no bundling. This differs from previous findings in the literature on multiple-risk insurance, where bundling always generates welfare gains to all insureds.

Chapitre 3

Rente Viagère et Assurance : Exclusivité et Legs

3.1 Introduction

Un contrat de rente viagère est un mécanisme d'assurance par lequel un individu transfert à une compagnie d'assurances son risque de longévité. En l'absence d'assurance, le risque de longévité se matérialise dans l'état défavorable de la nature lorsque l'individu survit à son épargne en vivant très longtemps ; dans l'état contraire, le risque ne se matérialise pas lorsque la personne meurt avant l'épuisement de ses ressources. Par contre, cet état 'favorable' de la nature ne permet pas à l'individu de profiter de l'effort d'épargne fait pendant sa vie active, car même s'il retire de l'utilité d'un legs laissé aux héritiers, cette utilité est moindre que s'il avait consommé le capital de son vivant.

En achetant un contrat viager, l'individu reçoit un revenu prédéterminé tant qu'il est en vie, en échange d'une prime payée avant le début des versements, date qui correspond généralement au début de la période de retraite.[1] Par contre, si cet individu meurt avant d'avoir reçu la valeur de la prime, rien n'est laissé aux héritiers, car l'assureur conserve la différence au bénéfice des rentiers qui vivront plus longtemps. La rente viagère constitue donc une assurance contre le risque de longévité par le transfert de ressources entre deux états de la nature (longue vie *versus* décès prématuré) ; elle évite à son détenteur la possibilité de survivre à son épargne, ainsi que celle de laisser un legs qui lui procurerait moins d'utilité que sa propre consommation. La rente agit aussi comme un mécanisme financier de transfert intertemporel en transformant en revenu de retraite les ressources non consommées pendant la période active; ce double rôle la distingue des autres types d'assurance (contre la maladie, les incendies, etc.) qui ne couvrent qu'un risque donné.

De ce deuxième rôle, qui relie l'achat de la rente à la décision d'épargne, découle une caractéristique propre au contrat de rente viagère, soit l'absence de la propriété d'exclusivité : contrairement à ce qui est généralement possible avec les autres types d'assurance, un assureur ne peut contrôler la quantité de rente achetée par un individu, et il accepte de vendre toute quantité de rente demandée par le client (en autant que le profit soit non-négatif). Or, combinée à une prime unitaire, la quantité d'assurance constitue une deuxième dimension de la tarification lorsque l'assureur propose un contrat non linéaire afin de contrer l'antisélection. S'il est impossible d'inclure une deuxième dimension dans la définition d'un menu de contrats, l'assureur ne peut offrir que des contrats linéaires, ce qui élimine la possibilité d'un

[1] On ne discute ici que des rentes viagères immédiates à paiements garantis, et on exclut d'autres types de produits, telles les rentes différées et les rentes variables (dont le rendement est lié à des actifs volatils), qui sont plutôt associées à des produits d'investissement et sont souvent rachetées avant le début des versements. De même, on ne considère que le marché d'assurance des particuliers, ce qui exclut tout mécanisme de pensions collectives.

équilibre séparateur sous antisélection.

Une deuxième dimension demeure cependant possible avec les contrats de rente. Il s'agit de ce qu'on peut appeler l'option de paiement au décès, laquelle garantit que l'assureur versera un montant aux héritiers si le rentier décède prématurément. Le reste de la rente est viager et payable seulement en cas de survie : c'est la portion de la rente qui assure le risque de longévité. Par cette option, l'assureur paie une portion de chaque dollar de rente achetée, quoi qu'il advienne : cette portion non viagère, assimilable à un simple mécanisme d'épargne, ne procure pas de protection contre le risque de longévité.[2] Un rentier doit alors attribuer une valeur suffisante au legs laissé aux héritiers afin de retirer un bien-être de cette option. Cette valeur variant de façon inverse et monotone avec le niveau de risque du rentier, cette option respecte ainsi la propriété de croisement unique et peut donc être utilisée dans un menu révélateur.

Dans cet article, nous montrons comment un assureur, confronté à un marché où la propriété d'exclusivité n'est pas respectée, peut malgré tout lutter contre l'antisélection s'il peut contrôler la répartition de la rente entre ses portions viagère et non viagère. Il en est ainsi car la condition de non réplicabilité est respectée, c'est-à-dire qu'une personne ne peut augmenter la portion viagère des rentes reçues en achetant plusieurs contrats similaires auprès de plusieurs assureurs. Dans ces conditions, nous verrons qu'un assureur peut offrir un menu de contrats à deux dimensions qui conduise les assurés à s'autosélectionner. Notre modélisation fera aussi ressortir l'importance du motif de legs dans ce mécanisme afin de reconnaître

[2]Concrètement, ces options garantissent une durée minimale de paiement de 5, 10 ou 15 ans, ou un pourcentage (ex. 50%) de la prime à être versée en toutes circonstances. Dans un marché financier sans friction, un tel contrat équivaut à l'achat simultané d'une rente purement viagère et d'une obligation d'épargne.

la valeur des deux états de la nature dans les préférences.

D'un point de vue empirique, Finkelstein et Poterba (2004) ont analysé un des marchés de rente les plus matures, soit le marché britannique. Ils constatent que près de 70% des rentes sont vendues avec une option de paiement au décès, et détectent la présence d'autosélection sur ces options : les rentiers qui meurent plus tôt ont choisi, *a priori,* des contrats avec plus de paiements à la succession (donc avec une plus grande portion non viagère), car ils auraient anticipé leur plus faible longévité. *A contrario,* il n'y avait pas de différence significative dans la mortalité des rentiers en fonction du montant de rente, ce qui signifie l'absence de sélection selon la quantité. Ils ont enfin calculé que le prix de la partie viagère de la rente reflète cette sélection.[3]

La littérature théorique modélise habituellement le contrat de rente comme le versement d'un montant absolu en cas de survie (voir Eckstein, Eichenbaum et Peled (1985), Eichenbaum et Peled (1987), Webb (2009), Davidoff (2009), Platoni (2010)). En supposant que l'assureur observe et contrôle ce montant, ces modèles font l'hypothèse implicite que la propriété d'exclusivité est respectée. Les options de paiement au décès ne sont généralement pas reflétées, mais certains modèles permettent l'investissement dans une obligation d'épargne afin de bonifier le revenu de la retraite lorsque la rente est insuffisante. Sous antisélection, la possibilité que l'assureur contraigne le montant de rente amène ces modèles théoriques à prédire un équilibre séparateur avec contrats non linéaires à la Rothshild et Stiglitz (1976). Cette prédiction contredit alors un des résultats empiriques de Finkelstein et Poterba (2004) selon lequel il n'y aurait pas de sélection sur le montant de rente.

Afin de comprendre la réalité du marché des rentes sous antisélection, nous com-

[3]Brown (2007) mentionne aussi la prévalence de ces options sur le marché américain des rentes, quoiqu'à notre connaissance, leur rôle de mécanisme révélateur n'a pas été examiné.

parons un modèle présentant la propriété d'exclusivité avec un modèle que ne la respecte pas. Nous situons ces deux modèles dans un cadre simple de cycle de vie sur deux périodes, ce qui est suffisant pour saisir l'essence du risque de longévité. Il est supposé que les gens vivent la première période, c'est-à-dire leur période active, avec certitude. Ensuite, soit ils meurent immédiatement, soit ils survivent durant la seconde période qui représente la retraite. La probabilité de survie à l'issue de la première période, qui reflète l'espérance de vie, est seule à diviser de façon exogène la population en deux catégories, et est la source de l'antisélection. Les gens avec une probabilité de survie élevée sont considérés comme un type élevé de risque de longévité (car ils nécessitent plus de ressources), et *vice versa.* Il est enfin possible qu'un legs soit laissé aux héritiers si le décès a lieu au début de la période de retraite. Alors que les modèles de cycle de vie de la littérature reconnaissent qu'un individu préfère dépenser lui-même un dollar plutôt que de le léguer, il est courant de simplifier l'analyse en n'accordant aucune valeur au legs.[4] Cependant, nous verrons qu'un motif de legs explicite dans l'utilité a un impact sur les équilibres de marchés selon le modèle de rente.

Le premier modèle de rente suppose l'exclusivité afin de reproduire ce qui est fait dans la littérature : l'individu couvre son risque de longévité en achètant en première période un montant de rente payable seulement en cas de survie lors de la

[4]Même si l'importance du legs est largement reconnue dans l'économie, sa motivation est sujette à diverse interprétation. Selon certains, le legs est le résultat non intentionnel de l'incertitude liée à la date du décès, aux dépenses médicales et aux revenus disponibles (voir Hurd (1987, 1989), Dynan et coll. (2004)). Pour Bernheim (1991), Gale et Scholz (1994), il y aurait plutôt une préférence explicite pour le transfert de richesse intergénérationnel. Entre les deux, Skinner et Zeldes (2002) proposent qu'en dépit d'un intérêt à laisser certains actifs aux héritiers, il y ait legs seulement lorsque l'épargne a été surestimée, et il y a redondance à avoir recours aux deux justifications.

retraite. L'assureur observe ce montant comme deuxième dimension du contrat avec la prime unitaire, et il peut le restreindre afin de se prémunir contre l'antisélection. Si ce montant ne comble pas tous les besoins de transfert intertemporel (c'est-à-dire de revenu de retraite), l'individu peut investir dans une obligation d'épargne traditionnelle dont le montant n'est pas observable par l'assureur.

Le deuxième modèle de rente relâche l'hypothèse d'exclusivité. L'assureur ne peut contrôler la quantité de rente achetée, mais il peut imposer, en tant que deuxième dimension du contrat, une répartition de la rente entre une portion viagère et une portion non viagère, ce qui reproduit l'option de paiement au décès. Lorsque combinée à la prime unitaire de la portion viagère, cette répartition peut définir un menu incitatif de contrats non linéaires.

Ces deux façons de représenter un contrat de rente respectent donc le fait que le revenu de retraite total, soit le transfert de ressource de la période active à la période de retraite, est une décision personnelle, et à ce titre, elle est hors du contrôle d'un assureur. Avec le contrat exclusif, la rente est entièrement viagère ; quoique l'assureur en connaisse le montant, il ignore l'investissement dans l'obligation d'épargne, et ainsi la répartition du revenu de retraite entre les parties viagère et non viagère. Avec un contrat non exclusif, la rente peut être partiellement viagère, mais elle n'est jamais plus chère qu'une obligation d'épargne sur un marché financier compétitif, ce qui rend le recours à l'épargne traditionnelle redondant. La totalité du revenu de retraite est donc transformée en cette rente dont le montant est inconnu de l'assureur, de même que le montant de la partie viagère : seule la répartition entre les deux parties est connue. Ainsi, la couverture d'assurance contre le risque de longévité est exprimée comme un montant absolu dans le premier cas, et comme une proportion dans le second cas. Enfin, nous démontrons l'effet des préférences sur les équilibres de marché en analysant les deux modèles de rentes successivement sans et avec motif de legs.

Sous information parfaite, la présence ou non de la propriété d'exclusivité n'altère pas les résultats, que ce soit en terme d'allocation de la richesse entre les périodes, ou en terme de bien-être de l'individu, qu'il y ait ou non motif de legs. Sans motif de legs, l'individu souhaite un revenu de retraite entièrement viager et les héritiers ne reçoivent rien en cas de décès prématuré, conformément à la littérature (par exemple, Yaari, 1965). Lorsque le legs génère suffisamment d'utilité, l'individu ne souhaite pas annuitiser le total de son revenu de retraite afin de prévoir un paiement aux héritiers en cas de décès prématuré. La partie non viagère est la même avec les deux modèles, quoiqu'elle prend alors la forme de l'obligation d'épargne dans le modèle exclusif, et la forme d'une portion de la rente dans le modèle sans exclusivité.

Sous antisélection, la préférence pour le motif de legs modifie les équilibres de marché. Sans motif de legs, l'équilibre du contrat exclusif est séparateur, et chacun paie sa prime actuarielle pour son revenu viager. Le rentier à risque élevé reçoit le montant de rente désiré, lequel correspond à son revenu de retraite, et il n'a pas recours à l'épargne traditionnelle. La personne à faible risque reçoit une rente moins élevée que désiré, et peut avoir recours à l'épargne traditionnelle afin de combler son besoin de transfert intertemporel.

Il est ainsi possible de discriminer sur la dimension associée à la couverture du risque du contrat exclusif, car le montant de rente étant aussi utilisé pour déterminer le transfert intertemporel, son optimum correspond à une solution intérieure. Cette dimension combine alors deux concepts, soit transfert intertemporel et couverture viagère, et en l'absence de motif de legs, c'est le besoin de transfert intertemporel qui agit dans le mécanisme incitatif.

Toujours sans motif de legs, l'équilibre du contrat non exclusif est au contraire assimilable à un équilibre mélangeant avec, comme prix unique de la portion viagère de la rente, la prime actuarielle de la population. En effet, sans motif de legs, tout individu a une utilité marginale strictement croissante en la portion viagère du revenu de retraite puisqu'il ne reçoit aucune utilité de l'état favorable de la nature, soit le décès prématuré. Contrairement au contrat exclusif, la dimension associée à la couverture du risque ne peut donc pas être utilisée pour établir une discrimination entre les assurés, et la couverture du contrat mélangeant consiste en la solution en coin d'un revenu de retraite entièrement viager. Ainsi, le contrat non exclusif établit une distinction entre les concepts de transfert intertemporel et de couverture viagère en les identifiant par deux variables différentes, soit le montant de rente et la portion viagère, respectivement.

En introduisant un motif de legs suffisant sous antisélection, l'équilibre de marché est séparateur pour les deux types de contrat. La personne à risque élevé obtient son contrat de premier rang, alors que la personne à faible risque obtient généralement un contrat sous-optimal avec une portion viagère plus faible que désiré. Dans le cas du contrat exclusif, l'ajout du motif de legs n'est en fait qu'une extension du cas sans motif de legs. Lorsque le contrat n'est pas exclusif, l'option de paiement au décès, exprimée par la portion non viagère du contrat, prend alors une valeur explicite, et la portion viagère optimale de la rente découle d'une solution intérieure. La discrimination sur la deuxième dimension du contrat devient ainsi possible, d'où l'équilibre séparateur. Enfin, nous trouvons que le relâchement de l'hypothèse d'exclusivité réduit le bien-être de l'individu à faible risque.

Les modèles de rentes avec et sans propriété d'exclusivité, dans un contexte où aucune valeur n'est accordée au legs, sont présentés dans la section suivante afin de caractériser les équilibres sous information parfaite et imparfaite. La Section 3.3 introduit le motif de legs et en détermine les effets sur ces équilibres de marché. Une dernière section conclut.

3.2 Modèle avec et sans propriété d'exclusivité

Dans un modèle de cycle de vie sur deux périodes, les gens vivent avec certitude la période $t = 1$, c'est-à-dire leur période active. Avec probabilité $p \in (0, 1)$, ils vivent ensuite la période $t = 2$ dédiée aux années de retraite, à la fin de laquelle ils meurent. Il y a donc une probabilité $(1 - p)$ que le décès survienne juste avant le début de la retraite.

La probabilité de survie est l'unique source d'hétérogénéité d'une population qui se divise en deux catégories : soit les gens ont une probabilité élevée de p_H, soit ils ont une probabilité faible de p_L, d'où $p_L < p_H$.

En première période, chaque individu bénéficie de la même richesse W, qui représente ses gains pendant sa période active. Pendant cette période, il transfère en seconde période une partie de sa richesse afin de soutenir sa consommation pendant sa retraite, et il souscrit à une rente viagère qui constituera une partie ou la totalité de ce transfert, selon les propriétés du marché d'assurances décrites dans l'introduction. Ces décisions sont prises simultanément avant la réalisation du risque de longévité.

Les préférences sont additives dans le temps, avec une fonction d'utilité instantanée $U(c_t)$, $t = 1, 2$, qui est croissante et concave dans la consommation, et qui est normalisée à $U(0) = 0$. Puisqu'une personne qui survit à sa date de retraite sait qu'elle mourra à la fin de la seconde période, il est optimal qu'elle dépense toutes ses ressources disponibles et qu'elle ne laisse aucun héritage.[5] Un legs est possible si le décès a lieu juste au début de la période de retraite, mais il est alors raisonnable de penser qu'un individu préfère son bien-être à celui de ses héritiers. Cependant, le modèle de cette section exclut le motif de legs, ce qui correspond à normaliser à zéro l'utilité tirée des ressources laissées en héritage.

L'utilité intertemporelle d'un individu i, $i \in \{L, H\}$, est donc

$$u_i = U(c_1) + p_i U(c_2). \tag{3.1}$$

La consommation c_1 et c_2 sera déterminée ci-dessous, selon que le marché de rentes respecte ou non la propriété d'exclusivité.

Dans un marché où le contrat de rente présente la propriété d'exclusivité, la personne i souscrit un montant A_i qu'elle recevra pendant sa retraite si elle est vivante. La propriété d'exclusivité permet à l'assureur d'observe ce montant et de le contraindre. Avec un prix unitaire π_i, la prime totale de la rente $\pi_i A_i$ est payable en première période. Si la personne décède avant sa retraite, elle ne reçoit rien, et l'assureur conserve le montant pour payer les rentiers survivants : la rente A_i est donc entièrement viagère. Avec une dimension quantité représentée par le montant absolù A_i, et une dimension prix unitaire π_i, ce contrat correspond à un modèle typique d'assurance.

Si le montant A_i ne comble pas tous les besoins de retraite de la personne, elle pourra aussi se procurer une obligation d'épargne d'un montant B_i. Le montant B_i sera versé en deuxième période, que la personne soit vivante ou non, mais en cas de décès, ce sont ses héritiers qui en profiteront. Le revenu total de retraite de cette

[5]En fait, il serait possible d'ajouter un motif de legs après la seconde période. Mais puisque le décès est certain, nous retrouverions un modèle à trois périodes, ce qui n'ajouterait rien à la présente analyse.

personne sera $A_i + B_i$, réparti entre la portion viagère A_i et la portion non viagère B_i. Naturellement, l'assureur qui offre la rente ne contrôle ni n'observe le montant investi en obligation : cet assureur ignore donc le revenu de retraite total de son assuré, de même qu'il ignore la part du revenu de retraite qui provient de la rente.

En supposant un marché financier parfait et sans incertitude, et étant donné que le banquier repaie le capital de l'obligation avec certitude, le rendement sur cette épargne est normalisé à zéro avec un prix unitaire de 1, et le coût total de l'obligation en première période est B_i.Pour sa part, l'assureur est neutre au risque et ne repaie le capital de la rente qu'en cas de survie. Il a accès au même marché financier que le banquier, et sur un marché concurrentiel, il retire un profit espéré nul de ses opérations. En conséquence, le prix actuariel calculé au niveau de chaque individu égale

$$\pi_i = p_i, i \in \{L, H\}. \tag{3.2}$$

Sinon, le prix actuariel au niveau de la population est

$$\pi_i = p_p = \rho p_H + (1 - \rho) p_L, \tag{3.3}$$

où $\rho \in (0, 1)$ est le pourcentage de la population qui est de risque élevé.

Finalement, avec un marché de rentes viagères respectant la propriété d'exclusivité, la consommation est définie comme

$$\begin{aligned} c_1 &= W - \pi_i A_i - B_i, \\ c_2 &= A_i + B_i, \end{aligned} \tag{3.4}$$

et la fonction de l'utilité intertemporelle est alors identifiée avec ses variables de choix $u_i (A_i, B_i)$.

Dans un marché de rentes qui ne respecte pas la propriété d'exclusivité, l'assureur ne peut limiter ou imposer le montant de rente acheté par la personne, et il accepte de vendre toute quantité demandée. Cependant, il observe et peut contrôler les options attachées au contrat, et l'une d'elles consiste en ce qu'on peut appeler le paiement au décès : il s'agit d'un montant payable en toute circonstance, que la personne vive longtemps ou décède prématurément. Concrètement, cette option consiste souvent en une période garantie de 5, 10 ou 15 ans où la rente est versée même si le rentier est décédé. Dans un marché financier sans friction, cette option est donc assimilable à un investissement dans une obligation d'épargne, et chaque dollar de rente vendu est réparti entre une portion viagère et une portion non viagère.

Ce contrat partiellement viager demeure toutefois moins cher qu'une obligation d'épargne. Il est donc rationel qu'une personne en demande une quantité couvrant la totalité de son revenu de retraite lequel, en reprenant la notation ci-dessus, s'élève à $A_i + B_i$. Malgré que l'assureur n'observe pas ce montant, il observe et contrôle la répartition entre A_i et B_i. Il définit donc un contrat unitaire dont il accepte de vendre la quantité demandée, ce contrat étant constitué d'une portion viagère $\frac{A_i}{A_i+B_i}$ et d'une portion non viagère $\frac{B_i}{A_i+B_i}$. Afin de faciliter l'écriture et le traitement de ce contrat, nous réécrivons la quantité de rente demandée comme $R_i = A_i + B_i$, et sa portion viagère comme $a_i = \frac{A_i}{A_i+B_i}$.

L'absence de la proprité d'exclusivité ne modifie pas les paramètres de tarification, mais seulement la manière de les appliquer. Ainsi, le prix de la rente avec option au décès consiste en une pondération entre le prix d'une rente entièrement viagère, tel que défini par (3.2) ou (3.3) , et le prix de l'obligation d'épargne égal à 1. Afin de recevoir un montant $R_i = a_i R_i + (1 - a_i) R_i$ en deuxième période, l'individu devra donc payer en première période une prime totale de $\pi_i a_i R_i + (1 - a_i) R_i$. Ce modèle de rente sans propriété d'exclusivité génére donc une consommation de

$$\begin{aligned} c_1 &= W - (\pi_i a_i + 1 - a_i) R_i, \\ c_2 &= a_i R_i + (1 - a_i) R_i = R_i. \end{aligned} \tag{3.5}$$

et une utilitée intertemporelle de $u_i(a_i, R_i)$.

Cependant, lorsqu'il y a non exclusivité, une option comme celle représentée par la dimension a_i s'utilise dans un mécanisme incitatif seulement s'il y a non réplicabilité. Autrement dit, tel que Finkelstein et Poterba (2004) l'ont mentionné, l'assureur peut demander un prix plus élevé à un individu à risque élevé si celui-ci ne peut reproduire les caractéristiques de son contrat en achetant sur le marché un portefeuille de contrats moins chers, et conçus pour l'individu à risque faible. Puisqu'un individu à risque élevé préfère une plus grande portion viagère, comme une période garantie plus courte, et que celle-ci ne peut être reproduite par une combinaison de contrats avec de longues périodes garanties, cette condition de non réplicabilité est respectée.[6] La nature unitaire de ce contrat ne l'empêche donc pas d'être constitué par deux dimensions, soit la portion viagère a_i et le prix $(\pi_i a_i + 1 - a_i)$ par dollar vendu, lesquelles pourront définir un mécanisme incitatif visant à contrer l'antisélection.

Que ce soit avec le modèle exclusif ou non exclusif, les parties viagère et non viagère du revenu de retraite sont des biens substituts parfaits, avec possibilité qu'un individu obtienne un profit infini en vendant le bien le plus cher pour acheter le moins cher : dans ce cas, il y aurait un endettement infini afin d'acheter une quantité infinie de revenu viager. Si l'individu survit, la dette serait remboursée

[6]L'autre option considérée par Finkelstein et Poterba (2004) est l'indexation du revenu de rente, laquelle est préférée par les individus à risque élevé et n'est pas réplicable par une combinaison de rentes non indexées.

avec le versement viager, et le solde resterait supérieur à la rente qui aurait été achetée sans endettement. Par contre, il pourrait mourir endetté sans possibilité de remboursement, ce qui rendrait les créanciers insolvables et éliminerait le marché du prêt. Il s'agit donc d'une possibilité d'arbitrage pour l'individu qui doit être éliminée avec la contrainte

$$B_i \geq 0 \tag{3.6}$$

pour le premier modèle, et la contrainte

$$a_i \leq 1 \tag{3.7}$$

dans le second cas.

Enfin, les modèles de rentes exclusives et non exclusives se comparent par le fait que seul l'individu connait le montant total de son revenu de retraite. Ce revenu étant composé d'une partie viagère et d'une partie non viagère, c'est la partie viagère qui constitue la couverture d'assurance. La différence fondamentale entre les deux modèles se situe dans ce que l'assureur peut observer et controler : alors que la propriété d'exclusivité lui permet d'observer le montant absolu de couverture viagère, mais non la répartition entre les deux parties, l'assureur n'observe pas le montant absolu de rente lorsque cette propriété est absente, mais seulement la portion viagère de chaque dollar de revenu de retraite. Dans ce deuxième cas, la couverture viagère est définie en terme de proportion plutôt qu'en terme absolu, cette proportion étant associée à l'option de paiement au décès du contrat de rente.[7]

[7]Notons que dans un contexte de marché financier sans friction, et en présence d'un marché obligataire, il serait redondant d'inclure une option de paiement au décès dans un contrat de rente exclusif ; A_i se doit donc d'être entièrement viager.

3.2.1 Information parfaite

Un assureur qui observe les caractéristiques de ses assurés demande à chacun sa prime actuarielle $\pi_i = p_i$. Avec les contrats exclusifs, un individu de type i, $i \in \{L, H\}$ a une utilité indirecte

$$\overline{V}_i^E = \max_{A_i, B_i} u_i\left(A_i, B_i\right),$$

sujet à (3.4) et à (3.6) ; u_i est défini par (3.1), et on obtient la solution de coin

$$\overline{B}_i = 0. \tag{3.8}$$

De façon similaire mais en ne supposant pas l'exclusivité des contrats de rentes, l'utilité indirecte de l'individu i est

$$\overline{V}_i^N = \max_{a_i, R_i} u_i\left(a_i, R_i\right),$$

sujet à (3.5) et à (3.7), et la solution de coin

$$\overline{a}_i = 1 \tag{3.9}$$

est aussi obtenue.

Dans les deux cas, il y a une assurance complète, dans le sens où la totalité du revenu de retraite est consacrée à la couverture viagère. Les conditions de premier ordre se résumeront par la même condition

$$U'\left(c_1\right) = U'\left(c_2\right), \tag{3.10}$$

soit un lissage dans le temps avec $c_1 = c_2 = c$. La consommation est donc équivalente dans les deux cas avec

$$c = \overline{A}_i = \overline{R}_i = \frac{W}{1 + p_i}, \tag{3.11}$$

ce qui donne aussi une équivalence dans l'utilité indirecte :

$$\overline{V}_i = \overline{V}_i^E = \overline{V}_i^N = (1 + p_i)\, U\left(\frac{W}{1 + p_i}\right). \tag{3.12}$$

La propriété d'exclusivité ne modifie pas la consommation sur les deux périodes, tous ayant accès à une annuitisation complète de leur revenu de retraite, et ne modifie donc pas le bien-être d'un individu. À richesse et préférence égales, l'individu à risque élevé obtient moins de consommation que l'individu à risque faible $\left(\frac{W}{1+p_H} < \frac{W}{1+p_L}\right)$, car il doit payer plus cher pour transférer des ressources de la première à la deuxième période : c'est donc ce premier individu qui a intérêt à cacher son profil à un assureur qui n'a pas accès à l'information sur ses clients.

3.2.2 Antisélection

Cette section établit un équilibre de marché, au sens de Nash,[8] pour les contrats exclusif et non exclusif respectivement, lorsque l'assureur ne peut identifier la catégorie de risque à laquelle appartient l'assuré. L'assureur ne pouvant observer le transfert intertemporel total de son client (soit le B_i qui complète A_i dans le premier cas, et le R_i dans le second), il ne peut inférer la catégorie de risque de l'individu.[9] Par contre, il connaît la répartition de risque dans la population, les préférences des

[8]Selon cette définition, un équilibre existe si aucun des contrats le constituant ne génère des profits négatifs, et s'il n'existe aucun autre contrat à l'extérieur de l'équilibre qui procurerait un profit non négatif à son émetteur.

[9]Bond et Crocker (1991) ont démontré qu'une allocation de premier rang est possible si l'assureur peut utiliser comme signal la consommation d'un bien corrélée avec le niveau de risque. Finkelstein et Poterba (2006) ont remarqué que des variables telles que la richesse et l'épargne, bien qu'elles soient facilement observables, sont rarement utilisées par les assureurs afin d'établir la prime des rentes viagères : c'est ce qu'ils ont appelé le "puzzle" de l'information non exploitée.

gens, ainsi que leurs processus de décision, et il peut donc en déduire la décision d'épargne d'une personne et en tenir compte dans l'établissement de son menu incitatif. Si l'équilibre est séparateur, chacun paie sa prime actuarielle $\pi_i = p_i$, $i \in \{L, H\}$ définie par (3.2) pour la portion viagère de son revenu de retraite, alors qu'avec un équilibre mélangeant, tous paient la prime $\pi_i = p_p$, $\forall i$, définie par (3.3).

En supposant l'existance d'un équilibre séparateur lorsque la propriété d'exclusivité est respectée, le montant d'épargne $\widehat{B}_i$ est choisi par l'individu sans aucune autre restriction que (3.6), alors que le montant de rente $\widehat{A}_i$ est contraint par l'assureur dans le cadre d'un menu incitatif. L'individu à risque élevé reçoit la même quantité de rente que sous information parfaite, car le contrat n'intéresse pas le risque faible :

$$\widehat{A}_H = \overline{A}_H = \frac{W}{1+p_H}.$$

Il n'a donc pas besoin d'épargne ($\widehat{B}_H = 0$) et il a l'utilité indirecte de premier rang :

$$\widehat{V}_H^E = \overline{V}_H.$$

La quantité d'assurance du risque faible est calculée selon

$$\begin{aligned} & \max_{\widehat{A}_L, \widehat{B}_L} U\left(W - p_L \widehat{A}_L - \widehat{B}_L\right) + p_L U\left(\widehat{A}_L + \widehat{B}_L\right) \qquad (3.13) \\ \text{sujet à } \overline{V}_H & \geq \max_{\widehat{B}_{\widetilde{H}}} U\left(W - p_L \widehat{A}_L - \widehat{B}_{\widetilde{H}}\right) + p_H U\left(\widehat{A}_L + \widehat{B}_{\widetilde{H}}\right), \\ \text{et à } \widehat{B}_{\widetilde{H}} & \geq 0, \ \widehat{B}_L \geq 0. \end{aligned}$$

La première contrainte incite l'individu à risque élevé à choisir son propre contrat, générant une valeur $\overline{V}_H$, plutôt que le contrat de l'autre invidivu. La variable $\widehat{B}_{\widetilde{H}}$ est la quantité d'épargne qu'il choisirait s'il achetait le contrat de rente de l'individu à faible risque caractérisé par la prime p_L et la quantité $\widehat{A}_L$. De son côté, l'individu à risque faible choisit un montant d'épargne $\widehat{B}_L$.

La solution du problème (3.13) est détaillée dans l'annexe D.2. Pour ce faire, nous prouvons en premier lieu à l'annexe D.1 que pour un contrat de rente donné, la quantité d'épargne augmente avec la probabilité de survie, d'où

$$\widehat{B}_{\widetilde{H}} \geq \widehat{B}_L \geq 0, \tag{3.14}$$

avec égalité entre $\widehat{B}_{\widetilde{H}}$ et $\widehat{B}_L$ lorsque ces deux quantités égalent zéro.[10] Ensuite, que les inégalités soient strictes ou non, nous montrons que la quantité de rente viagère du risque faible doit être sous-optimale

$$\widehat{A}_L < \overline{A}_L = \frac{W}{1+p_L}, \tag{3.15}$$

ce qui génère l'utilité indirecte de second rang

$$\widehat{V}_L^E < \overline{V}_L. \tag{3.16}$$

La solution au problème (3.13) peut aussi se voir graphiquement sur la figure 3.1, l'idée ici étant d'introduire un rapprochement avec les solutions de la section 3.3. Ainsi, pour une quantité de rente A donnée, et pour $i \in \left\{L, H, \widetilde{H}\right\}$, les étiquettes u_i^* correspondent à

$$u_i^*(A) = \max_{B_i \geq 0} u_i(A, B_i), \tag{3.17}$$

[10]On sait que lorsque la quantité de rente n'est pas contrainte, il y a solution de coin avec absence d'épargne, peu importe le prix de la rente, pourvu qu'il soit inférieur au prix de l'épargne. Naturellement, la quantité d'épargne est à son maximum lorsqu'il n'y a pas de rente. Entre les deux quantités de rente, la quantité d'épargne décroît graduellement, mais elle rencontre la contrainte de non-négativité avant que la rente soit à son niveau optimal. Dans ce cas, l'épargne est trop chère en regard de la probabilité de survie, c'est-à-dire à la probabilité d'en profiter à la seconde période, considérant qu'une partie suffisante du besoin de transfert intertemporel est déjà comblée par la rente.

avec une prime π_i pour la rente de

$$\begin{aligned} \pi_H &= p_H, \\ \pi_L &= p_L, \\ \pi_{\widetilde{H}} &= p_L. \end{aligned}$$

La courbe d'utilité $u^*_{\widetilde{H}}(A)$ est donc celle de l'individu à risque élevé qui a la possibilité de payer la prime p_L pour un montant de rente donné.[11] Ces fonctions $u^*_i(A)$ admettent un maximum lorsque le problème est bien défini.

Alors que les valeurs $\overline{A}_L > \overline{A}_H$ et $\overline{V}_L < \overline{V}_H$ ont été calculées ci-dessus sous information parfaite, le point $\overline{A}_{\widetilde{H}}$ est le montant de rente non contraint qu'achèterait l'individu à risque élevé s'il payait la prime p_L. On montre d'ailleurs en annexe D.3 que $\overline{A}_{\widetilde{H}} > \overline{A}_L$. Il est aussi facile de voir qu'en tout point A, $u^*_{\widetilde{H}}(A) > u^*_H(A)$, soit

$$\max_{B\geq 0} U(W - p_L A - B) + p_H U(A+B) > \max_{B\geq 0} U(W - p_H A - B) + p_H U(A+B).$$

Ainsi, $\widehat{A}_L$ est défini par la contrainte d'incitation, c'est-à-dire

$$\overline{V}_H = u^*_{\widetilde{H}}\left(\widehat{A}\right).$$

Puisque cette contrainte est forcément respectée dans l'intervalle $A \in \left(0, \overline{A}_H\right)$, alors $\widehat{A}_L < \overline{A}_H$, et donc

$$\widehat{A}_L < \overline{A}_L,$$

comme déterminée dans la solution analytique.

Similairement à Rothshild et Stiglitz (1976) qui établissent les conditions pour l'existence d'un tel équilibre séparateur, un simple argumentaire peut démontrer

[11] Le graphique pourrait aussi montrer la courbe d'utilité intertemporelle de l'individu L qui paie la prime p_H. En tout point A, cette courbe serait en dessous de $u^*_L(A)$, illustrant que cet individu refuserait le contrat de l'individu H.

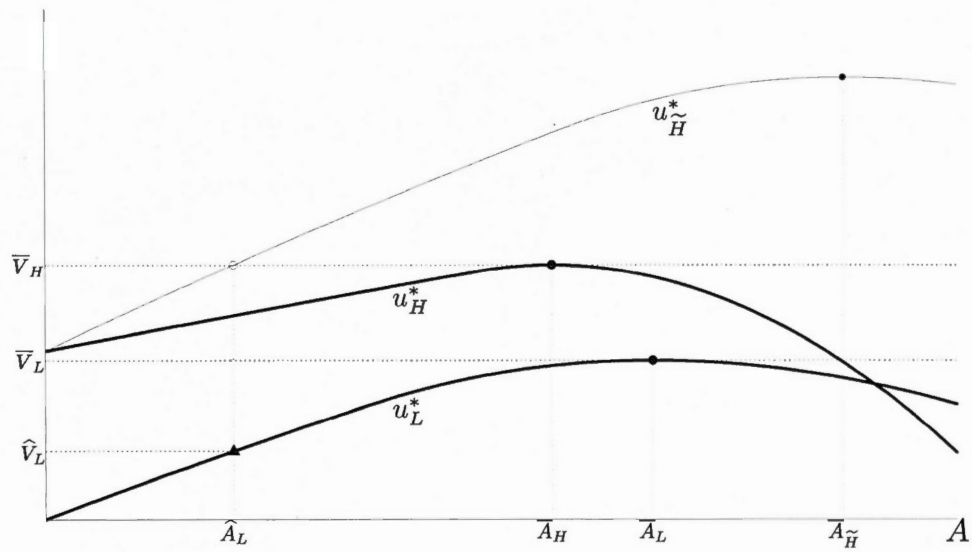

Fig. 3.1 – Utilité intertemporelle en fonction de A (épargne optimisée)

qu'un équilibre mélangeant ne respecte pas la définition d'équilibre au sens de Nash, et peut donc être éliminé pour les contrats exclusifs.[12]

Dans un marché de rente sans propriété d'exclusivité, rappelons que c'est la proportion $\widehat{a}_i$ qui constitue, avec le prix unitaire, la deuxième dimension du menu incitatif, alors que le revenu de retraite $\widehat{R}^e_i$ est le choix propre à l'individu. Puisque les équilibres séparateur et mélangeant seront développés tour à tour afin d'être

[12]Dans le cas contraire, tous les individus recevraient le contrat défini par la prime p_P et une quantité $\widehat{A}_P$. Un compétiteur offrant un second contrat avec une prime plus petite $\pi \in (p_L, p_P)$ pourrait alors déterminer une quantité inférieure à $\widehat{A}_P$ afin de n'attirer que les individus à risque faible tout en restant profitable. En effet, l'individu à risque élevé préfère une plus grande quantité de rente, comme prouvé par $\overline{A}_{\widetilde{H}} > \overline{A}_L$ en annexe D.3, et n'est pas intéressé par un coût unitaire moindre s'il s'accompagne d'une baisse de couverture. Ce second contrat contredit donc la définition d'équilibre de marché. Un équilibre mélangeant est cependant possible selon la définition de Wilson (1976), mais exige une plus grande rationalité de la part de l'assureur afin qu'il anticipe la réaction des compétiteurs dans ses décisions.

comparés, l'exposant $e \in \{s, p\}$ identifie le type d'équilibre pour les variables qui en dépendent.

Si l'équilibre est séparateur, la proportion $\widehat{a}_i$ maximise le bien-être d'une personne, sujet à ce que son contrat n'intéresse pas l'autre personne. Formellement, le menu de contrats est caractérisé par le double problème pour $i, j \in \{L, H\}$, $j \neq i$,

$$\begin{aligned} & \max_{\widehat{a}_i, \widehat{R}_i^s} U\left(W - (p_i \widehat{a}_i + 1 - \widehat{a}_i)\, \widehat{R}_i^s\right) + p_i U\left(\widehat{R}_i^s\right) \\ \text{sujet à } \widehat{V}_j & \geq \max_{\widehat{R}_{\tilde{j}}^s} U\left(W - (p_i \widehat{a}_i + 1 - \widehat{a}_i)\, \widehat{R}_{\tilde{j}}^s\right) + p_j U\left(\widehat{R}_{\tilde{j}}^s\right), \\ \text{et à } \widehat{a}_i & \leq 1. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Similairement au développement avec le premier type de contrat, le revenu de retraite $\widehat{R}_{\tilde{j}}^s$ est le montant que choisirait l'individu j s'il pouvait acheter le contrat de l'individu i. Puisque la fonction objective de l'individu i est strictement croissante en $\widehat{a}_i$, la solution sera déterminée soit par la contrainte incitative, soit par la contrainte de non-arbitrage. En regardant la contrainte incitative, on peut réécrire

$$\begin{aligned} & \max_{\widehat{R}_j} U\left(W - (p_j \widehat{a}_j + 1 - \widehat{a}_j)\, \widehat{R}_j^s\right) + p_j U\left(\widehat{R}_j^s\right) \\ \geq \; & \max_{\widehat{R}_{\tilde{j}}} U\left(W - (p_i \widehat{a}_i + 1 - \widehat{a}_i)\, \widehat{R}_{\tilde{j}}^s\right) + p_j U\left(\widehat{R}_{\tilde{j}}^s\right). \end{aligned}$$

La seule différence entre les deux côtés de l'inégalité est le prix unitaire pondéré de la rente défini par les paranthèses $(p_j \widehat{a}_j + 1 - \widehat{a}_j)$ et $(p_i \widehat{a}_i + 1 - \widehat{a}_i)$. L'utilité étant strictement décroissante en ces parenthèses, la contrainte est respectée si

$$p_i \widehat{a}_i + 1 - \widehat{a}_i \geq p_j \widehat{a}_j + 1 - \widehat{a}_j$$

pour $i \neq j$ and $i, j \in \{L, H\}$. Pour ces individus, cette double inégalité revient à une égalité entre le prix unitaire pondéré entre chaque individu, soit

$$p_H \widehat{a}_H + 1 - \widehat{a}_H = p_L \widehat{a}_L + 1 - \widehat{a}_L, \tag{3.19}$$

ce qui établit cette relation entre les deux proportions

$$\begin{aligned} \widehat{a}_L &= \widehat{a}_H \left(\frac{1-p_H}{1-p_L} \right) \\ &\Rightarrow \widehat{a}_L < \widehat{a}_H. \end{aligned} \tag{3.20}$$

En tenant compte de cette contrainte d'incitation, et du fait que l'utilité intertemporelle est strictement croissante en $\widehat{a}_i$, la solution optimale de chacun est définie par la contrainte de non-arbitrage, de sorte que

$$\begin{aligned} \widehat{a}_H &= 1, \\ \widehat{a}_L &= \frac{1-p_H}{1-p_L}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

L'individu à risque élevé obtient donc son contrat de premier rang, et il fait le même choix pour sa quantité de revenu de retraite que sous information parfaite

$$\widehat{R}^s_H = \overline{R}_H = \frac{W}{1+p_H},$$

et il en retire la même utilité indirecte

$$\widehat{V}^{Ns}_H = \overline{V}_H.$$

De l'autre côté, la couverture de l'individu à faible risque correspond au ratio des probabilités de décès de chacun, et elle est sous-optimale. Cette plus petite couverture amène le prix unitaire pondéré de sa rente à égalité avec p_H, ce qui est naturellement plus élevé que sous information parfaite ; cet individu choisira donc un revenu de retraite plus faible

$$\widehat{R}^s_L < \overline{R}_L = \frac{W}{1+p_L},$$

et obtiendra une utilité indirecte moindre

$$\widehat{V}^{Ns}_L < \overline{V}_L.$$

Considérons maintenant l'équilibre mélangeant pour ce type de contrat, où les deux personnes paieraient le même prix unitaire $p_P \in (p_L, p_H)$ pour la partie viagère de la rente, c'est-à-dire la prime actuarielle au niveau de la population. Étant donné que l'utilité intertemporelle croit strictement avec la proportion de couverture viagère, tout autre contrat qui aurait cette prime p_P mais une couverture inférieure au maximum permis serait dominé par le contrat avec

$$\widehat{a}_P = 1; \tag{3.22}$$

le prix unitaire pondéré du capital-retraite est donc p_P pour tous les individus.

De plus, contrairement au contrat exclusif, il n'existe pas d'autre contrat qui contredirait la définition de l'équilibre au sens de Nash. En effet, dans le cadre habituel d'un contrat exclusif où l'équilibre mélangeant serait considéré, il existe toujours un contrat alternatif générant un profit non négatif en attirant que les assurés à faible risque avec une prime et une couverture légèrement plus faibles, l'assuré à haut risque ayant une plus forte utilité marginale d'assurance. Avec la rente non exclusive, le contrat alternatif attirerait le rentier à faible risque dans la mesure où le prix unitaire pondéré serait inférieur à p_P; or, un tel contrat attirerait aussi le rentier à risque élevé, et étant déficitaire, il ne peut pas exister, et l'équilibre mélangeant est préservé.

Avec l'équilibre mélangeant, le prix unitaire pondéré p_P de la rente est inférieur au prix unitaire pondéré de l'équilibre séparateur qui, par (3.21) et (3.2), égale p_H pour les deux individus. Ce prix plus petit permet à chacun d'avoir plus de revenu de retraite sous l'équilibre mélangeant que sous l'équilibre séparateur ($\widehat{R}_i^s < \widehat{R}_i^p$, $i = L, H$).

Comparé à la situation sous information parfaite où la prime est actuarielle au niveau de chaque individu, le prix unitaire pondéré de l'équilibre mélangeant est tel que $p_L < p_P < p_H$, et la personne à risque élevé aura plus de ressources à la retraite que sous information parfaite, et *vice versa* pour la personne à risque faible

$$\begin{aligned} \widehat{R}_H^s &= \overline{R}_H < \widehat{R}_H^p, \\ \widehat{R}_L^s &< \widehat{R}_L^p < \overline{R}_L. \end{aligned} \tag{3.23}$$

L'effet de ces différences dans les prix unitaires pondérés se reflète aussi dans les utilités indirectes

$$\begin{aligned} \overline{V}_H &= \widehat{V}_H^{Ns} < \widehat{V}_H^{Np}, \\ \widehat{V}_L^{Ns} &< \widehat{V}_L^{Np} < \overline{V}_L. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Selon cette dernière série d'inégalités, chaque individu est en meilleure situation avec le contrat mélangeant qu'avec le contrat séparateur. En conséquence, en l'absence de la propriété d'exclusivité, l'équilibre mélangeant domine strictement, au sens de Pareto, l'équilibre séparateur.

Ainsi, lorsque le modèle attribue au contrat de rente la propriété d'exclusivité, comme le fait habituellement la littérature théorique de façon implicite, l'équilibre sous antisélection, au sens de Nash, est conforme à celui pour tout contrat générique d'assurance, comme dans Rothshild et Stiglitz (1976), en étant caractérisé par un menu de contrats non linéaires avec les dimensions prix unitaire et quantité. En relâchant l'hypothèse d'exclusivité et ainsi éliminant la dimension quantité du contrat, nous avons introduit l'option de paiement au décès afin de définir la portion viagère de la rente comme une seconde dimension du contrat.

Cependant, en l'absence de motif de legs, l'utilité marginale de a, soit la portion viagère du revenu de retraite, est strictement positive sur tout son domaine. Alors que l'effet sélectif de telles options ait été détecté empiriquement par Finkelstein et

Poterba (2004), cette dimension ne peut pas être utilisée pour établir une discrimination entre les individus, puisque la couverture désirée contre le risque de longévité consiste en la solution en coin pour tous avec un revenu de retraite entièrement viager. Autrement dit, un paiement contingent au décès n'a pas de valeur lorsque le legs n'est pas reconnu, et il n'a pas d'impact sur l'utilité indirecte, ni les choix de l'individu : l'équilibre ne reconnait donc pas l'option au décès comme une dimension du menu de contrats, et résulte en un contrat unique à tarification linéaire.

En comparaison, l'absence de motif de legs n'empêche pas la discrimination sur le montant de rente du contrat exclusif. En effet, la variable de la quantité d'assurance joue aussi un rôle de transfert intertemporel : le montant de rente optimal correspond alors à une solution intérieure, ce qui permet à l'utilité indirecte de reconnaître la valeur de la deuxième dimension du contrat. L'amalgame des deux rôles n'est pas présent avec le contrat non exclusif, car il dissocie les concepts de transfert intertemporel et de couverture viagère en les identifiant par deux variables distinctes, soit le montant de rente et la portion viagère, respectivement.

La section suivante examinera donc l'effet d'effet du motif de legs sur la deuxième dimension d'un contrat de rente.

3.3 Effet du motif de legs

Comme mentionné précédemment, un motif de legs signifie qu'un individu retire de l'utilité de la consommation de ses héritiers, quoique dans une moindre mesure que l'utilité tirée de sa propre consommation. Pour une représentation simple de l'utilité de laisser un héritage h à la fin de la première période, le terme $\theta U(h)$ s'ajoute à l'utilité intertemporelle définie par (3.1), laquelle devient pour un individu

i, $i \in \{L, H\}$,

$$u_i^h = U(c_1) + p_i U(c_2) + (1 - p_i)\theta U(h), \tag{3.25}$$

avec $\theta \in (0, 1)$. Le cas $\theta = 0$ revient à l'analyse de la section précédente ; le cas $\theta = 1$ est aussi exclu car il signifie que l'individu est totalement indifférent entre sa consommation et celle des héritiers, ce qui éliminerait l'incertitude liée à la longévité. Cette formulation implique aussi que l'utilité marginale d'un dollar de legs est inférieure à l'utilité marginale d'un dollar de consommation, une représentation adéquate de la réalité.

Le montant de l'héritage h correspond à la partie non viagère du transfert intertemporel, et sa définition formelle dépend du type de contrat de rente viagère. En cohérence avec la consommation c_1 et c_2 qui est toujours caractérisée par (3.4) et (3.5)

$$h = B_i \tag{3.26}$$

avec le contrat exclusif et l'utilité intertemporelle devient $u_i^h(A_i, B_i)$, alors que

$$h = R_i(1 - a_i) \tag{3.27}$$

avec le contrat non-exclusif pour donner une utilité intertemporelle de $u_i^h(a_i, R_i)$.

Enfin, lorsqu'il y a motif de legs, les parties viagère et non viagère demeurent des biens substituts, mais non parfaits, car ils ne sont plus tous les deux exclusivement destinés à la consommation en période deux. Quoique, intuitivement, il semble optimal de ne pas annuitiser entièrement le transfert intertemporel, une épargne nulle ou négative demeure possible lorsque le motif de legs est faible (θ petit), en améliorerant la consommation d'une personne sur les deux périodes au dépens des héritiers. Comme dans le cas où il n'y a pas de motif de legs, il s'agit toujours d'une possibilité d'arbitrage. Puisque d'un point de vue légal, un légataire a généralement le droit de refuser les dettes de son testateur, et qu'il est rationnel de le faire, l'endettement n'est pas plus permis dans cette section que dans la section précédente. De plus, nous nous concentrerons sur les situations où les contraintes de non-arbitrage sont strictement respectées avec

$$B_i > 0 \tag{3.28}$$

et

$$a_i < 1 \tag{3.29}$$

afin d'éviter un legs nul qui nous ramènerait à l'analyse de la section 3.2 de par $U(0) = 0$.

3.3.1 Information parfaite

Lorsque la propriété d'exlusivité est respectée, un individu de type $i \in \{L, H\}$ résout,

$$\overline{V}_i^{Eh} = \max_{\overline{A}_i^h, \overline{B}_i^h} u_i^h \left(\overline{A}_i^h, \overline{B}_i^h\right),$$

avec un prix de rente actuarielle $\pi_i = p_i$. Les deux conditions de premier ordre se synthétisent en

$$U'\left(W - p_i\overline{A}_i^h - \overline{B}_i^h\right) = U'\left(\overline{A}_i^h + \overline{B}_i^h\right) = \theta U'\left(\overline{B}_i^h\right). \tag{3.30}$$

Comme dans la situation sans motif de legs, il y a lissage de la consommation entre les deux périodes. En outre, le montant laissé en héritage est inférieur à cette consommation.

Avec une solution

$$\overline{B}_i^h > 0, \tag{3.31}$$

il est optimal de ne pas annuitiser entièrement le transfert intertemporel, et la rente viagère est plus petite que lorsqu'il n'y a pas de motif de legs :

$$0 < \overline{A}_i^h < \frac{W}{1+p_i} = \overline{A}_i. \tag{3.32}$$

En effet, en considérant les deux états de la nature (survie et décès), le choix entre l'épargne et la rente devient un compromis entre un moyen moins cher de financer sa retraite et le bien-être de ses héritiers. Lorsque qu'un seul état de la nature est considère en l'absence de motif de legs, ce compromis disparaît et il ne reste que le compromis entre la consommation des deux périodes, soit le choix intertemporel qu'effectuent à la fois les variables A et B.

Avec (3.30), l'égalité entre c_1 et c_2 implique que l'individu à risque faible bénéficie de plus de revenu de retraite $\left(\overline{A}_L^h + \overline{B}_L^h > \overline{A}_H^h + \overline{B}_H^h\right)$ car son coût pondéré entre 1 et p_L est plus faible. De plus, le legs est proportionnel au revenu de retraite et cette relation ne dépend pas directement de la probabilité de survie, ce qui implique $\overline{B}_L > \overline{B}_H$, comme prouvé formellement en annexe E.2. Il y est aussi prouvé que la comparaison entre $\overline{A}_L^h$ et $\overline{A}_H^h$ est ambiguë, car deux effets interagissent. D'un côté, l'individu à haut risque achète plus de rente de par l'effet substitution entre la rente et son épargne qui est plus petite. De l'autre côté, le prix actuariel plus élevé de sa rente le limite dans cet achat.

Dans le cas où le contrat de rente est non exclusif, le problème devient

$$\overline{V}_i^{Nh} = \max_{\overline{a}_i^h, \overline{R}_i^h} u_i^h \left(\overline{a}_i^h, \overline{R}_i^h\right).$$

Similairement au contrat exclusif, la relation

$$U'\left(W - \left(p_i\overline{a}_i^h + 1 - \overline{a}_i^h\right)\overline{R}_i^h\right) = U'\left(\overline{R}_i^h\right) = \theta U'\left(\overline{R}_i^h\left(1 - \overline{a}_i^h\right)\right) \tag{3.33}$$

est obtenue à partir des deux conditions de premier ordre. Un legs strictement positif, mais moindre que le revenu de retraite, signifie que

$$0 < \overline{a}_i^h < 1,$$

soit une annuitisation incomplète. En effet, puisque $\overline{a}_i^h$ réduit le prix pondéré de la rente, son choix résulte d'un compromis entre ce prix plus faible et l'héritage à laisser aux héritiers. Ce compromis n'existe pas sans motif de legs, car seul l'effet sur le prix de la rente est pris en considération. En outre, avec ou sans motif de legs, le choix intertemporel (qui est le compromis entre les deux périodes), est exclusivement assuré par la variable R.

Malgré la différence des deux types de rente, la relation (3.33) établit la même consommation pour les deux périodes, comme avec (3.30), et le même rapport entre la consommation et le legs. Il y a donc équivalence, comme c'était le cas en l'absence du motif de legs, avec

$$\begin{aligned}
c^h &= \overline{A}_i^h + \overline{B}_i^h = \overline{R}_i^h = \frac{W}{1 + \overline{a}_i^h p_i + 1 - \overline{a}_i^h} < \frac{W}{1 + p_i}, \\
\overline{A}_i^h &= \overline{R}_i^h \overline{a}_i^h, \\
\overline{B}_i^h &= \overline{R}_i^h \left(1 - \overline{a}_i^h\right), \\
\overline{a}_i^h &= \frac{\overline{A}_i^h}{\overline{A}_i^h + \overline{B}_i^h} \\
\overline{V}_i^h &= \overline{V}_i^{Eh} = \overline{V}_i^{Nh}.
\end{aligned}$$

Cette équivalence dit aussi que $\overline{R}_L^h > \overline{R}_H^h$ (car le prix unitaire pondéré de la rente est plus petit pour la personne à faible risque). L'ambiguïté $\overline{a}_L^h \gtrless \overline{a}_H^h$ est démontrée en annexe E.5.

3.3.2 Antisélection

Comme dans la section 3.2, nous procédons ici avec les deux types de contrat. Dans le cas du contrat exclusif, le motif de legs ne change pas une de ces caractéristiques qui veut qu'à prime égale, deux individus acceptent des quantités différentes d'assurance, comme prouvé avec $\overline{A}_L^h < \overline{A}_{\widetilde{H}}^h$ en annexe E.3. Cette caractéristique, que l'on retrouve aussi avec les modèles d'assurance standards, est à la base du rejet de l'équilibre mélangeant, tel que décrit à la section 3.2, car elle permet une discrimination à la fois sur les prix et les quantités. Nous procédons donc directement à l'équilibre séparateur.

Dans cette situation, l'individu à risque élevé obtient son contrat de premier rang, car la prime élevée de ce contrat n'intéresse pas l'individu à risque faible ; il choisira aussi le même montant d'épargne et recevra la même utilité indirecte :

$$\begin{aligned}\widehat{A}_H^h &= \overline{A}_H^h, \\ \widehat{B}_H^h &= \overline{B}_H^h, \\ \widehat{V}_H^{hE} &= \overline{V}_H^h.\end{aligned}$$

Par ailleurs, le problème de l'individu à faible risque est le suivant :

$$\widehat{V}_L^{hE} = \max_{\widehat{A}_L^h, \widehat{B}_L^h} u_L^h\left(\widehat{A}_L^h, \widehat{B}_L^h\right) \tag{3.34}$$

sujet à la contrainte incitative

$$\begin{aligned}\overline{V}_H^h &\geq \max_{\widehat{B}_{\widetilde{H}}^h > 0} u_{\widetilde{H}}^h\left(\widehat{A}_L^h, \widehat{B}_{\widetilde{H}}^h\right) \qquad (3.35) \\ &= U\left(W - p_L\widehat{A}_L^h - \widehat{B}_{\widetilde{H}}^h\right) + p_H U\left(\widehat{A}_L^h + \widehat{B}_{\widetilde{H}}^h\right) + (1-p_H)\theta U\left(\widehat{B}_{\widetilde{H}}^h\right),\end{aligned}$$

à $\widehat{B}_{\widetilde{H}}^h > 0$, $\widehat{B}_L^h > 0$, ainsi qu'à $\lambda \geq 0$, lequel est le multiplicateur de Lagrange associé à (3.35). Comme précédemment, l'indice $\widetilde{H}$ dénote l'individu H qui achèterait une rente au prix p_L. La contrainte incitative qui détermine la quantité de rente viagère $\widehat{A}_L$ devient

$$\begin{aligned} & \left[-p_L U'\left(W - p_L \widehat{A}_L^h - \widehat{B}_L^h\right) + p_L U'\left(\widehat{A}_L^h + \widehat{B}_L^h\right)\right] \\ = \; & \lambda\left[-p_L U'\left(W - p_L \widehat{A}_L^h - \widehat{B}_{\widetilde{H}}^h\right) + p_H U'\left(\widehat{A}_L^h + \widehat{B}_{\widetilde{H}}^h\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Nous appliquons ici la solution graphique introduite dans la section 3.2, mais de façon plus détaillée, afin d'analyser les conditions (3.35) et (3.53). D'ailleurs, le problème (3.34) peut s'illustrer avec le graphique 3.1, car le motif de legs ne change pas fondamentalement les formes des courbes d'utilité intertemporelle. Naturellement, les étiquettes u_i^* doivent être réinterprétées pour $i \in \left\{L, H, \widetilde{H}\right\}$

$$u_i^{*h}(A) = \max_{B_i > 0} u_i^h(A, B_i), \tag{3.37}$$

où la prime π_i est toujours définie par

$$\begin{aligned} \pi_H &= p_H, \\ \pi_L &= p_L, \\ \pi_{\widetilde{H}} &= p_L, \end{aligned}$$

$\overline{V}_H^h$ correspondant à la valeur maximale de u_H^{*h}.

Lorsque seul le prix π_i de la rente change, on a $\frac{du_i^{*h}}{d\pi_i} < 0$, c'est-à-dire qu'un individu aura une plus grande utilité intertemporelle en payant moins cher pour un montant strictement positif de rente. Formellement, ceci implique

$$\begin{aligned} u_{\widetilde{H}}^{*h}(A) &> u_H^{*h}(A), \; \forall A > 0, \\ u_{\widetilde{H}}^{*h}(0) &= u_H^{*h}(0), \end{aligned}$$

De même, pour un individu donné, la quantité A qui maximise $u_i^{*h}(A)$ augmente si la prime est plus faible, d'où $\overline{A}_{\widetilde{H}}^h > \overline{A}_H^h$. Conséquemment, la condition (3.35) est respectée sur le domaine défini comme $A \in \left[0, A^M\right]$, A^M étant la valeur où cette condition est à égalité et donc mordante ; c'est dans ce domaine que devrait se trouver la solution $\widehat{A}_L^h$.

Étant donné ce qui précède, il est évident que $A^M \in \left(0, \overline{A}_H^h\right)$, impliquant que la condition (3.35) est mordante entre zéro et $\overline{A}_H^h$, là où devrait se trouver $\widehat{A}_L^h$. Par contre, en tenant compte de l'ambiguïté $\overline{A}_L^h \gtrless \overline{A}_H^h$ sous information parfaite, la relation entre $\overline{A}_L^h$ et $\widehat{A}_L^h$ est aussi ambigue.

Si $\overline{A}_H^h \leq \overline{A}_L^h$, alors A^M est forcément entre zéro et $\overline{A}_L^h$ et nous obtenons $\widehat{A}_L^h = A^M < \overline{A}_L^h$ comme dans le résultat standard d'assurance. C'est donc dire que $\widehat{A}_L^h$ est situé sur les parties croissantes des fonctions $u_L^{*h}(A)$ et $u_{\widetilde{H}}^{*h}(A)$. Les expressions entre crochets à gauche et à droite de (3.53) représentant respectivement la pente de ces fonctions, elles sont strictement positives, de même que le multiplicateur λ.

Dans le cas où $\overline{A}_H^h > \overline{A}_L^h$, on ne peut exclure que $\overline{A}_L^h < A^M < \overline{A}_H^h$. Dans ce cas, A^M serait situé sur la partie croissante de la fonction $u_{\widetilde{H}}^{*h}(A)$ mais sur la partie décroissante de $u_L^{*h}(A)$, et les expressions entre crochets de la condition (3.53) seraient de signes opposés. Puisque le multiplicateur de Lagrange ne peut pas être négatif, il doit alors être fixé à zéro, signifiant que la contrainte d'incitation n'est pas mordante. Dit autrement, la quantité de rente qui maximise l'utilité intertemporelle de l'individu à faible risque est suffisamment faible pour ne pas intéresser l'individu à risque élevé, ce qui permet au premier d'obtenir aussi son contrat de premier rang avec $\widehat{A}_L^h = \overline{A}_L^h < A^M$.

Pour résumer l'équilibre séparateur du contrat exclusif, si nous avons $\overline{A}_H^h \leq \overline{A}_L^h$ sous information parfaite, alors le résultat standard s'applique et la personne à faible risque obtient un contrat de rente sous-optimal. L'épargne étant un substitut à la rente, cette personne épargnera plus et laissera donc un héritage plus important à ses héritiers que sous information parfaite. De l'autre côté, si les contrats sous information parfaite sont caractérisés par $\overline{A}_H^h > \overline{A}_L^h$, alors il est possible (mais non certain) que la personne à faible risque atteigne sa situation de premier rang. Ainsi,

$$\widehat{A}_L^h \leq \overline{A}_L^h,$$
$$\widehat{B}_L^h \geq \overline{B}_L^h,$$
$$\widehat{V}_L^{hA} \leq \overline{V}_L^h,$$

où l'égalité peut se produire pour les trois variables lorsque $\overline{A}_H^h > \overline{A}_L^h$.

Le peu d'impact du motif de legs sur l'analyse d'un contrat exclusif tient au fait que l'utilité intertemporelle conserve les mêmes propriétés par rapport aux variables de choix : dans les deux cas, la fonction d'utilité est maximisée par des solutions intérieures, et à prime égale, la personne à risque élevé a une plus grande utilité marginale d'assurance que la personne à risque faible, ce qui permet de discriminer les individus avec la dimension du contrat qu'est la quantité d'assurance.

Cependant, le contrat non exclusif, dont la partie viagère constitue la couverture d'assurance, voit son utilité marginale dramatiquement changée par l'ajout du motif de legs. Nous avons vu que sans motif de legs, l'utilité intertemporelle est strictement croissante dans la couverture d'assurance puisqu'elle ne reconnaît pas explicitement la conséquence de l'état favorable (c'est-à-dire le décès), avec, entre autres conséquences, un équilibre mélangeant sous antisélection. Le motif de legs introduit le compromis entre deux états de la nature afin de permettre une solution intérieure pour la couverture d'assurance. Par ce compromis, la personne à risque élevée préfère plus d'assurance que la personne à risque faible pour une prime donnée, comme le précise le résultat $\overline{a}_L^h < \overline{a}_{\widetilde{H}}^h$ prouvé en annexe E.6. Cette caractéristique du modèle est similaire au résultat $\overline{A}_L^h < \overline{A}_{\widetilde{H}}^h$ du contrat exclusif qui éliminait la possibilité d'un équilibre mélangeant.

L'analyse pour le contrat non exclusif sous antisélection ressemble donc à celle d'un problème d'assurance standard ; pour cette raison, nous nous contentons d'appliquer les grandes lignes de l'analyse précédente du contrat exclusif. Ainsi, en plus d'éliminer la possibilité d'un équilibre mélangeant, l'utilité marginale d'assurance plus petite de la personne à risque faible la détourne du contrat de la personne à risque élevé, ce qui permet à ce dernier d'obtenir le même contrat que sous information parfaite, et de choisir le même revenu de retraite :

$$\begin{aligned}
\widehat{a}_H^h &= \overline{a}_H^h < 1, \\
\widehat{R}_H^h &= \overline{R}_H^h, \\
\widehat{V}_H^{hN} &= \overline{V}_H^h.
\end{aligned}$$

Le problème consiste donc à déterminer la couverture viagère de la personne à faible risque, $\widehat{a}_L^h$, de sorte que, combinée à la prime p_L, ce contrat n'intéresse pas la personne à risque élevée :

$$\begin{aligned}
\widehat{V}_L^{hN} &= \max_{\widehat{a}_L^h, \widehat{R}_L} U\left(W - \left(p_L \widehat{a}_L^h + 1 - \widehat{a}_L^h\right) \widehat{R}_L\right) + p_L U\left(\widehat{R}_L\right) \\
&\quad + (1 - p_L)\, \theta U\left(\widehat{R}_L\left(1 - \widehat{a}_L^h\right)\right)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
\text{sujet à } \overline{V}_H &\geq \max_{\widehat{R}_{\widetilde{H}}} U\left(W - \left(p_L \widehat{a}_L^h + 1 - \widehat{a}_L^h\right) \widehat{R}_{\widetilde{H}}\right) \\
&\quad + p_H U\left(\widehat{R}_{\widetilde{H}}\right) + (1 - p_H)\, \theta U\left(\widehat{R}_{\widetilde{H}}\left(1 - \widehat{a}_L^h\right)\right), \\
\text{et à } \widehat{a}_L^h &< 1.
\end{aligned}$$

Le graphique 3.1 peut aussi servir à illustrer ce problème, en réinterprétant l'abscisse $A \geq 0$ comme $a \in (0,1)$, et les étiquette u_i^* pour $i \in \left\{L, H, \widetilde{H}\right\}$ comme

$$u_i^{*h}(a) = \max_{R_i > 0} u_i^h(a, R_i), \tag{3.39}$$

toujours avec la prime π_i

$$\begin{aligned} \pi_H &= p_H, \\ \pi_L &= p_L, \\ \pi_{\widetilde{H}} &= p_L. \end{aligned}$$

Parce, comme avec le contrat exclusif, le prix de la rente a un impact négatif sur l'utilité intertemporelle, la personne à risque élevé préfère payer la prime p_L, de sorte que le côté droit de la contrainte d'incitation a toujours les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} u_{\widetilde{H}}^{*h}(a) &> u_H^{*h}(a), \ \forall a \in (0,1], \\ u_{\widetilde{H}}^{*h}(0) &= u_H^{*h}(0), \end{aligned}$$

avec $\overline{V}_H^h$ comme valeur maximale de u_H^{*h}.

Ainsi, la contrainte d'incitation sera aussi mordante à une proportion $a^M \in \left(0, \overline{a}_H^h\right)$. Étant donné que $\overline{a}_H^h \gtrless \overline{a}_L^h$, la proportion a^M pourra se situer avant ou après la proportion de premier rang. Si elle est avant, alors $\widehat{a}_L^h$ est déterminée par la contrainte d'incitation et est sous-optimale. Dans ce cas, le prix pondéré du revenu de retraite sera plus élevé que sous information parfaite, ce qui limitera le transfert intertemporel. Si $a^M > \overline{a}_L^h$, alors la contrainte d'incitation n'est pas mordante et la personne à faible risque obtient son contrat de premier rang, comme la personne à risque élevée. C'est le cas lorsque la différence dans la couverture de premier rang est suffisante pour servir de mécanisme révélateur. Pour résumer,

$$\begin{aligned}
\widehat{a}_L^h &\leq \overline{a}_L^h, \\
\widehat{R}_L^h &\leq \overline{R}_L^h, \\
\widehat{V}_L^{hN} &\leq \overline{V}_L^h,
\end{aligned}$$

et l'égalité peut se produire pour les trois variables lorsque $\overline{a}_H^h > \overline{a}_L^h$.

Finalement, étant donné l'équilibre séparateur qui s'applique au deux types de contrats, nous concluons cette section en comparant la couverture contre le risque de longévité et le bien-être de la personne à faible risque, afin de déterminer l'effet de la propriété d'exclusivité. Naturellement, puisque la personne à risque élevé obtient son contrat de premier rang dans les deux cas, la propriété d'exclusivité n'affecte pas son bien-être et elle est indifférente entre les deux types de contrats.

Par contre, afin de comparer la couverture viagère de la personne à faible risque, nous reprenons le contexte du graphique 3.1. En premier lieu, en supposant une contrainte d'incitation mordante pour les deux types de contrats, les solutions $\widehat{a}_L^h$ et $\widehat{A}_L^h$ correspondent aux points où les courbes $u_{\widetilde{H}}^{*h}(a)$ et $u_{\widetilde{H}}^{*h}(A)$ croisent la même ligne $\overline{V}_H^h$. La comparaison dépend donc entièrement de ces deux courbes, dont l'une doit être ramenée dans le plan de l'autre.

Si nous ramenons la courbe $u_{\widetilde{H}}^{*h}(A)$ dans le plan dont l'abscisse est a, nous utilisons la correspondance $a = \frac{A}{A+B}$, où, de manière équivalente, $A(a) = \frac{aB}{1-a}$. En laissant tomber les indices, le changement de plan transforme cette courbe en

$$u_{\widetilde{H}}^{*h}(A(a)) = \max_{B>0} U\left(W - p_L \frac{aB}{1-a} - B\right) + p_H U\left(\frac{aB}{1-a} + B\right) + (1 - p_H)\,\theta U(B),$$

qui peut maintenant se comparer avec $u_{\widetilde{H}}^{*h}(a)$ définie par (3.39). Évidemment, $u_{\widetilde{H}}^{*h}(A(0)) = u_{\widetilde{H}}^{*h}(0)$. De plus, ces deux courbes atteignent leur maximum au même endroit $\overline{a}_{\widetilde{H}}$ pour donner la même utilité indirecte, car il n'est pas nécessaire que la prime soit actuarielle pour que les deux types de contrats aient la même solution optimale, comme le démontre l'équivalence des conditions (3.56) et (3.60) en annexe. Ainsi, nous savons que ces courbes ont les mêmes points de départ et d'arrivée, et qu'elles croisent $\overline{V}_H^h$ sur leur partie croissante, soit entre $a = 0$ et $a = \overline{a}_{\widetilde{H}}$. En supposant qu'elles ne se confondent pas, si l'une des deux courbes a une pente plus élevée lorsque $a \rightarrow 0^+$, alors elle sera forcément au-dessus de l'autre sur le domaine $\left(0, \overline{a}_{\widetilde{H}}\right)$ pour croiser $\overline{V}_H^h$ avant l'autre et donner une couverture viagère plus petite.

Or nous démontrons en annexe E.7 que

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\partial u_{\widetilde{H}}^{*h}\left(A\left(a\right)\right)}{\partial a} < \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\partial u_{\widetilde{H}}^{*h}\left(a\right)}{\partial a}; \tag{3.40}$$

la contrainte incitative du contrat non exclusif est donc mordante avant celle du contrat exclusif, générant moins de couverture viagère pour le contrat non exclusif. Comme autre conséquence de (3.40), si la contrainte incitative n'est pas mordante pour ce contrat, ce sera aussi le cas pour le contrat exclusif : c'est la seule situation où les deux contrats donnent le même résultat, qui est celui de premier rang pour les deux individus. Par contre, une contrainte non mordante pour le contrat exclusif n'implique pas nécessairement que ce sera le cas pour le contrat non-exclusif.

Pour résumer[13]

$$\widehat{a}_L^h \leq \frac{\widehat{A}_L^h}{\widehat{A}_L^h + \widehat{B}_L^h};$$

Le relâchement de l'hypothèse d'exclusivité résulte donc en moins de bien-être pour la personne à faible risque

$$\widehat{V}_L^{ha} \leq \widehat{V}_L^{hA},$$

[13] De façon similaire, si nous avions travaillé dans un plan dont la variable A est l'abscisse, nous aurions trouvé $\widehat{a}_L^h \widehat{R}_L^h \leq \widehat{A}_L^h$.

à l'exception du cas où il y a égalité dans ces trois relations lorsque les deux types de contrat donnent le résultat de premier rang.

3.4 Conclusion

Lorsqu'un marché d'assurance respecte la propriété d'exclusivité, le montant de couverture qu'un individu achète contre un risque, que ce soit auprès d'un ou de plusieurs assureurs, est connu et contrôlé. Pour une prime donnée, un assureur peut alors contraindre la quantité d'assurance offerte dans le cadre d'un menu incitatif visant à contrer l'antisélection. Cet article a étudié la capacité d'un assureur à agir face à l'information imparfaite lorsque la propriété d'exclusivité n'est pas respectée, ainsi que la façon de modéliser cette réalité qui s'applique au marché des rentes individuelles.

La propriété d'exclusivité est implicitement accolée à la plupart des modèles théoriques d'assurance, ce qui reflète généralement le marché de l'assurance autre que celui des rentes. Par contre, la littérature théorique impose souvent cette propriété aux contrats de rente, tels Eckstein, Eichenbaum et Peled (1985), Eichenbaum et Peled (1987), Webb (2009), Davidoff (2009), Platoni (2010).

Aux fins de l'analyse, nous avons comparé un modèle de rente présentant la propriété d'exclusivité, lequel est similaire avec ce que propose la littérature, avec un modèle sans cette propriété, dans un contexte simplifié de cycle de vie sur deux périodes. Nous avons vu que sous information parfaite, la propriété d'exclusivité n'a pas d'impact sur l'allocation de richesse.

Sous antisélection, la propriété d'exclusivité permet de combiner la quantité d'assurance avec la prime unitaire, constituant les deux dimensions d'un contrat non linéaire menant à un équilibre séparateur à la Rothshild et Stiglitz (1976). Cependant, une étude empirique de Finkelstein et Poterba (2004) sur le marché britannique n'a pas détecté de sélection sur la quantité de rente, ce qui contredit l'équilibre séparateur du contrat exclusif.

En relâchant l'hypothèse d'exclusivité, la quantité ne peut pas être utilisée par l'assureur pour établir un menu de contrats, mais, toujours selon Finkelstein et Poterba (2004), il y aurait sélection sur certaines options attachées au contrat de rente. Une de ces options consiste en l'option de paiement au décès (telle que la garantie du paiement de la rente pour un certain nombre d'années, peu importe la survie du rentier), qui correspond à la séparation des paiements de rente entre une partie viagère et une partie non viagère. Ainsi, les individus présentant *a posteriori* une plus grande longévité choisiraient *a priori* une plus grande portion viagère. Notre modèle de rente sans exclusivité considère donc cette option comme la deuxième dimension du contrat, en lieu et place de la quantité. Cette option est d'ailleurs courante pour les contrats de rente individuels, ce qui rend le modèle encore plus fidèle au marché.

Cependant, les préférences intertemporelles de l'individu doivent inclure un motif de legs pour que l'équilibre tienne compte de l'option de paiement au décès. Il s'agit, en effet, de reconnaître une valeur aux conséquences d'un décès prématuré, ce qui correspond à l'état favorable de la nature lorsqu'il est question du risque de longévité. Avec un motif de legs, le modèle prédit une plus grande partie viagère pour les rentiers avec une plus grande longévité, tel que mesuré. Il est donc possible d'utiliser d'autres caractéristiques du contrat que la quantité pour définir une deuxième dimension, en autant que la caractéristique soit liée aux préférences des individus quant à leur niveau de risque.

Sans motif de legs, l'équilibre sous antisélection rejette cette option comme deuxième dimension de la tarification, et résulte en un équilibre mélangeant constitué d'un contrat linéaire et unique à tous les individus. Puisque cet équilibre mélangeant va à l'encontre des données indiquant la sélection sur les options du contrat, l'étude de Finkelstein et Poterba (2004) peut aussi être vue comme une évidence supplémentaire de la présence d'un motif de legs chez les rentiers.

Annexe A Impact of the risk profile on $\overline{q}_m$

In the model where only medical insurance is possible under perfect information, and where premium is actuarially fair, we look at the impact of the individual risk profile on the distortion in the optimal amount of insurance, $\overline{q}_m - m$. We proceed with a separate calculation for each source of risk. First, for a given level of survival probability ($p_h + p_i$ constant), we calculate $\frac{d\overline{q}_m}{dp_i}$, setting $\frac{dp_h}{dp_i} = -1$. Second, we measure how the variation in the survival probability affects the optimal coverage for a given illness probability : it means that looking for $\frac{d\overline{q}_m}{dp_h}$ when $dp_i = 0$.

For the purposes of these calculations, we define the intertemporal utility as

$$u = U\left(W - \sigma q - R\right) + \left[p_i U\left(R - m + q\right) + p_h U\left(R\right)\right].$$

We first need to calculate the first-order conditions

$$\begin{aligned} u_R &= -U'\left(W - \sigma q - R\right) + p_i U'\left(R - m + q\right) + p_h U'(R) = 0, \\ u_q &= -\sigma U'\left(W - \sigma q - R\right) + p_i U'(R - m + q) = 0, \end{aligned}$$

and the second derivatives

$$\begin{aligned} u_{RR} &= U''(c_1) + p_i U''(c_2^i) + p_h U''(c_2^h) < 0, \\ u_{qq} &= \sigma^2 U''(c_1) + p_i U''(c_2^i) < 0, \\ u_{Rq} &= \sigma U''(c_1) + p_i U''(c_2^i) < 0. \end{aligned}$$

A.1 Impact of the illness probability for a given survival probability

Formally, we calculate $\frac{d\overline{q}_m}{dp_i}$ when $p_h + p_i$ is constant $\left(\frac{dp_h}{dp_i} = -1\right)$. We start with the total derivative of the first-order conditions with regard to p_i

$$
\begin{aligned}
u_{RR}\frac{d\overline{R}_m}{dp_i} + u_{Rq}\frac{d\overline{q}_m}{dp_i} + qU''(c_1)\frac{d\sigma}{dp_i} + \frac{dp_i}{dp_i}U'(c_2^i) + \frac{dp_h}{dp_i}U'(c_2^h) &= 0, \\
u_{Rq}\frac{d\overline{R}_m}{dp_i} + u_{qq}\frac{d\overline{q}_m}{dp_i} - U'(c_1)\frac{d\sigma}{dp_i} + \sigma qU''(c_1)\frac{d\sigma}{dp_i} + \frac{dp_i}{dp_i}U'(c_2^i) &= 0,
\end{aligned}
$$

that we rearrange as

$$
\begin{bmatrix} u_{RR} & u_{Rq} \\ u_{Rq} & u_{qq} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \frac{d\overline{R}_m}{dp_i} \\ \frac{d\overline{q}_m}{dp_i} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -qU''(c_1) + \frac{p_d}{p_h}U'(c_2^i) \\ -\sigma qU''(c_1) \end{bmatrix},
$$

where the right-hand side of the equation was simplified by using $\frac{d\sigma}{dp_i} = 1$ from the fair premium $\sigma = p_i$, and with (2.19).

The system is solved with the Cramer rule to find $\frac{d\overline{q}_m}{dp_i}$:

$$
\frac{d\overline{q}_m}{dp_i} = \frac{\begin{vmatrix} u_{RR} & -qU''(c_1) + \frac{p_d}{p_h}U'(c_2^i) \\ u_{Rq} & -\sigma qU''(c_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_{RR} & u_{Rq} \\ u_{Rq} & u_{qq} \end{vmatrix}}.
$$

Knowing that the denominator is always positive from the respect of the second-order condition, the sign of $\frac{d\overline{q}_m}{dp_i}$ is the sign of

$$
\left[qU''(c_1) - \frac{p_d}{p_h}U'(c_2^i)\right] u_{Rq} - \sigma qU''(c_1)u_{RR}
$$

which becomes

$$
qU''(c_1)\left(p_iU''(c_2^i) + p_i^2U''(c_2^i) + p_hp_iU''(c_2^h)\right) - \frac{p_d}{p_h}U'(c_2^i)u_{Rq} > 0
$$

after few manipulations, and using $u_{Rq} < 0$.

Consequently, for a given probability of survival ($p_d > 0$ and $dp_i + dp_h = 0$),

$$\frac{d\overline{q}_m}{dp_i} > 0.$$

A.2 Impact of the survival probability for a given illness probability

We now look at $\frac{d\overline{q}_m}{dp_h}$ when $dp_i = 0$. In the way of the previous calculation, we start with the total derivative of the first-order conditions with regard to p_h. Because p_i is constant, so is σ from fair pricing : $\frac{dp_i}{dp_h} = \frac{d\sigma}{dp_h} = 0$.

$$\begin{aligned} u_{RR}\frac{d\overline{R}_m}{dp_h} + u_{Rq}\frac{d\overline{q}_m}{dp_h} + \frac{dp_h}{dp_h}U'(c_2^h) &= 0, \\ u_{Rq}\frac{d\overline{R}_m}{dp_h} + u_{qq}\frac{d\overline{q}_m}{dp_h} &= 0. \end{aligned}$$

The equations are rearranged as

$$\begin{bmatrix} u_{RR} & u_{Rq} \\ u_{Rq} & u_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\overline{R}_m}{dp_h} \\ \frac{d\overline{q}_m}{dp_h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U'(c_2^h) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

From the Cramer rule,

$$\frac{d\overline{q}_m}{dp_h} = \frac{\begin{vmatrix} u_{RR} & -U'(c_2^h) \\ u_{Rq} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_{RR} & u_{Rq} \\ u_{Rq} & u_{qq} \end{vmatrix}}.$$

Given the positive denominator from the second-order condition, $\frac{d\overline{q}_m}{dp_h}$ has the sign of $U'(c_2^h)u_{Rq}$, which is negative. Consequently, for $dp_i = 0$,

$$\frac{d\overline{q}_m}{dp_h} < 0:$$

if two individuals have the same illness probability , the one with the higher survival probability will prefer a lower coverage for his medical insurance.

If we combine together $\frac{d\overline{q}_m}{dp_i} > 0$ and $\frac{d\overline{q}_m}{dp_h} < 0$, we may say that an individual with a better health and a higher expected longevity will prefer a lower insurance coverage. Given the two individual types, this means without ambiguity that

$$\overline{q}_m^U > \overline{q}_m^H.$$

Annexe B Graphical analysis of LTCI

B.1 The indifference curve

Given an amount of insurance q and a premium amount Σ, let the lifetime utility be

$$v = \max_R u = U(W - \Sigma - \phi R) + p_i U(R - m + q) + p_h U(R),$$

where ϕ is a parameter that exploits the fact that $\pi^{a\prime}(a) < 0$ to ease the notation below. Indeed, without annuity, $\phi = 1$; it decreases when a increases, up to the point where $\phi = \pi$ when $a = 1$.

In a plan (q, Σ), individuals prefer higher coverage q and lower premium Σ, meaning that indirect utility increases in the southeast direction. For any point q in the plan, R results from

$$-\phi U'(W - \Sigma - \phi R) + p_i U'(R - m + q) + p_h U'(R) = 0 \tag{3.41}$$

so that $\frac{dv}{dR} = 0$. For a constant v, the slope of the indifference curve $\Sigma(q)$ is calculated from the total differentiation

$$\begin{aligned} 0 &= -U'(c_1)\, d\Sigma + p_i U'\left(c_2^i\right) dq \\ \Rightarrow \frac{d\Sigma}{dq} &= \frac{p_i U'\left(c_2^i\right)}{U'(c_1)} > 0 \end{aligned} \tag{3.42}$$

The curvature of this curve is calculated as

$$\frac{d^2\Sigma}{dq^2} = \frac{p_i U''\left(c_2^i\right)\left(\frac{dR}{dq} + 1\right) + \frac{d\Sigma}{dq} U''(c_1)\left(\frac{d\Sigma}{dq} + \phi \frac{dR}{dq}\right)}{U'(c_1)} \tag{3.43}$$

To analyze this expression, we calculate $\frac{dR}{dq}$ by doing the total differentiation of the FOC that determines the optimal R :

$$0 = \phi U''(c_1)\frac{d\Sigma}{dq} + \phi^2 U''(c_1)\frac{dR}{dq} + p_i U''(c_2^i)\frac{dR}{dq} + p_i U''(c_2^i) + p_h U''(c_2^h)\frac{dR}{dq} \tag{3.44}$$

Then, substituting $\frac{dR}{dq}$ of (3.44) into (3.43), and after some manipulations, we obtain

$$\frac{\left(\frac{d\Sigma}{dq} - \phi\right)^2 p_i U''(c_1)\, U''\left(c_2^i\right) + \left[\left(\frac{d\Sigma}{dq}\right)^2 U''(c_1) + p_i U''\left(c_2^i\right)\right] p_h U''(c_2^h)}{U'(c_1)\left[\phi^2 U''(c_1) + p_i U''(c_2^i) + p_h U''(c_2^h)\right]} < 0 :$$

the indifference curve is thus concave at any point q.

B.2 Single-crossing property

Single-crossing property is ensured if one person always has a steeper indifference curve than the other at any given point q.

First, for a given probability of illness (p_i constant), we verity how the slope varies with the survival probability. We calculate $\frac{d^2\Sigma}{dq\,dp_h}$, starting with (3.42) :

$$0 = -U'(c_1)\frac{d\Sigma}{dq} + p_i U'\left(c_2^i\right).$$

The total derivation gives

$$0 = -U'(c_1)\frac{d^2\Sigma}{dqdp_h} + U''(c_1)\frac{d\Sigma}{dq}\left(\frac{d\Sigma}{dp_h} + \phi\frac{dR}{dp_h} + R\frac{d\phi}{dp_h}\right) + p_i U''(c_2^i)\left(\frac{dR}{dp_h} + \frac{dq}{dp_h}\right).$$

At a given point q, $\frac{dq}{dp_h} = 0$, so is $\frac{d\Sigma}{dp_h}$; thus

$$\frac{d^2\Sigma}{dqdp_h} = \frac{U''(c_1)\frac{d\Sigma}{dq}\left(\phi\frac{dR}{dp_h} + R\frac{d\phi}{dp_h}\right) + p_i U''(c_2^i)\frac{dR}{dp_h}}{U'(c_1)}.$$

We know that $\frac{dR}{dp_h} > 0$. Whether the longevity risk is partly or totally covered, provided the premium π increase with p_h, $\frac{d\phi}{dp_h} > 0$ (or $\frac{d\phi}{dp_h}$ with no insurance). Consequently,

$$\frac{d^2\Sigma}{dqdp_h} < 0,$$

and for a given p_i, the person with a higher survival probability will have a smoother indifference curve.

We now check, for a constant survival probability, how the LTC probability affects the indifference curve ($\frac{d^2\Sigma}{dqdp_i}$ when $dp_i + dp_h = 0$). Still starting from (3.42), the total derivative gives

$$0 = -U'(c_1)\frac{d^2\Sigma}{dqdp_i} + U''(c_1)\frac{d\Sigma}{dq}\left(\frac{d\Sigma}{dp_i} + \phi\frac{dR}{dp_i}\right) + U'(c_2^i) + p_i U''(c_2^i)\left(\frac{dR}{dp_i} + \frac{dq}{dp_i}\right).$$

Using $\frac{d\Sigma}{dp_i} = \frac{d\Sigma}{dq}\frac{dq}{dp_i} = 0$, then

$$\frac{d^2\Sigma}{dqdp_i} = \frac{\left[\phi U''(c_1)\frac{d\Sigma}{dq} + p_i U''(c_2^i)\right]\frac{dR}{dp_i} + U'(c_2^i)}{U'(c_1)}.$$

Because it can be proven that $\frac{dR}{dp_i} < 0$, then

$$\frac{d^2\Sigma}{dqdp_i} > 0$$

when $p_i + p_h$ is constant.

Combined with the result $\frac{d^2\Sigma}{dqdp_h} < 0$ for constant p_i, it proves that for any point q, the indifference curve is steeper for the unhealthy individual, confirming that the single-crossing property is met.

B.3 Impact of the annuity on the Indifference curve

This sub-section analyzes the movement of the indifference curve when a person purchases an annuity. Formally, a complete annuitization implies that ϕ, the unit cost of the retirement capital, is decreasing from 1 to the fair premium π. Still with a premium fair at the individual level, a partial annuitization means that ϕ decreases, though to a lower extent. Therefore, we can say that $\frac{d\phi}{da} < 0$.

First, we look at the impact of ϕ on the level of the indifference curve for a given indirect utility and a given q :

$$\begin{aligned} 0 &= -U'(c_1)\, d\Sigma - ZU'(c_1)\, d\phi \\ &\Rightarrow \frac{d\Sigma}{d\phi} = -Z < 0, \end{aligned}$$

or

$$\frac{d\Sigma}{da} > 0.$$

It means that the indifference curve would move upward when ϕ decreases by the purchase of an annuity but if the lifetime value is artificially unchanged : if the curve was tangent to the policy line before the purchase, it is above after the purchase. To go back to a tangency point with the policy line, the curve must move back downward, implying a gain in lifetime value : this illustrates the welfare gain of the annuity purchase.

To see the whole picture of the impact of the annuity purchase, its impact on the slope of the indifference curve must be verified; we thus calculate $\frac{d^2\Sigma}{dqd\phi}$ for a given point q. Using (3.42), the total derivative with regard to ϕ is

$$0 = -U'(c_1)\frac{d^2\Sigma}{dqd\phi} + U''(c_1)\frac{d\Sigma}{dq}\left(\frac{d\Sigma}{d\phi} + \phi\frac{dZ}{d\phi}\right) + p_i U''\left(c_2^i\right)\frac{dZ}{d\phi};$$

given that $\frac{d\Sigma}{d\phi} = \frac{d\Sigma}{dq}\frac{dq}{d\phi} = 0$, we rearranged as

$$\frac{d^2\Sigma}{dqd\phi} = \frac{U''(c_1)\frac{d\Sigma}{dq}\phi + p_i U''\left(c_2^i\right)}{U'(c_1)}\frac{dZ}{d\phi}.$$

Knowing that Z is an ordinary good with $\frac{dZ}{d\phi} < 0$, then $\frac{d^2\Sigma}{dqd\phi} > 0$, or

$$\frac{d^2\Sigma}{dqda} < 0;$$

the purchase of an annuity flattens the indifference curve.

Annexe C Impact of the annuity premium π on q_c

We are in a situation where insurance exists for both risks, and where the equilibrium on the annuity market is characterized by a linear pricing with π^a as the weighted cost of annuity. We are looking for $\frac{dq_c}{d\pi}$ in the unconstrained problem that maximizes the intertemporal utility

$$u = U(W - \sigma q - \pi^a Z) + [p_i U(Z - m + q) + p_h U(Z)].$$

by the joint choice of Z and q_c,

In this problem, the first-order conditions are

$$\begin{aligned} u_Z &= -\pi^a U'(W-\sigma q-\pi^a Z)+p_i U'(Z-m+q)+p_h U'(Z)=0, \\ u_q &= -\sigma U'(W-\sigma q-\pi^a Z)+p_i U'(Z-m+q)=0, \end{aligned}$$

and the second derivatives

$$\begin{aligned} u_{ZZ} &= (\pi^a)^2 U''(c_1)+p_i U''(c_2^i)+p_h U''(c_2^h)<0, \\ u_{qq} &= \sigma^2 U''(c_1)+p_i U''(c_2^i)\cdot<0, \\ u_{Zq} &= \sigma\pi^a U''(c_1)+p_i U''(c_2^i)<0. \end{aligned}$$

Given that only the choice variables may vary with π^a, and that all other parameters are fixed, the total derivative of the first-order conditions with regard to π^a are

$$\begin{aligned} u_{ZZ}\frac{dZ}{d\pi^a}+u_{Zq}\frac{dq_c}{d\pi^a}-U'(c_1)\frac{d\pi^a}{d\pi^a} &= 0, \\ u_{Zq}\frac{dZ}{d\pi^a}+u_{qq}\frac{dq_c}{d\pi^a} &= 0, \end{aligned}$$

that we rearrange as

$$\begin{bmatrix} u_{ZZ} & u_{Zq} \\ u_{Zq} & u_{qq} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{dZ}{d\pi^a} \\ \frac{dq_c}{d\pi^a} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U'(c_1) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

This system is solved with the Cramer rule to find:

$$\frac{dq_c}{d\pi^a}=\frac{\begin{vmatrix} u_{ZZ} & U'(c_1) \\ u_{Zq} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_{ZZ} & u_{Zq} \\ u_{Zq} & u_{qq} \end{vmatrix}}.$$

Knowing that the denominator is always positive from the respect of the second-order condition, the sign of $\frac{dq_c}{d\pi^a}$ is the sign of

$$-U'(c_1)\, u_{Zq},$$

which is always positive from $u_{Zq} < 0$.

Therefore,

$$\frac{dq_c}{d\pi^a} > 0;$$

the unconstrained LTCI amount increases with the weighted cost of the annuity. In other words, the LTCI and the annuity are substitute goods.

Annexe D Sans motif de legs

D.1 Comparaison de $\widehat{B}_{\widetilde{H}}$ et $\widehat{B}_L$ pour une rente $\widehat{A}_L$ donnée

En définissant $\widehat{B}_{\widetilde{H}} > 0$ comme l'épargne choisie par l'individu avec une probabilité p_H et $\widehat{B}_L > 0$ comme l'épargne choisie par l'individu avec une probabilité p_L lorsque les deux achètent un contrat de rente caractérisé par p_L et $\widehat{A}_L$, nous comparons $\widehat{B}_{\widetilde{H}}$ et $\widehat{B}_L$.

Le problème se résume alors à une seule condition de premier ordre qui détermine l'épargne B :

$$0 = -U'\left(W - B - p_L\widehat{A}_L\right) + pU'\left(B + \widehat{A}_L\right),$$

En faisant la dérivé totale

$$\begin{aligned}
0 &= \left[U''\left(W - B - p_L\widehat{A}_L\right) + pU''\left(B + \widehat{A}_L\right)\right] dB + U'\left(B + \widehat{A}_L\right) dp, \\
\Rightarrow \frac{dB}{dp} &= \frac{-U'\left(B + \widehat{A}_L\right)}{U''\left(W - B - p_L\widehat{A}_L\right) + pU''\left(B + \widehat{A}_L\right)} > 0,
\end{aligned}$$

et considérant que $p_H > p_L$, nous obtenons

$$\widehat{B}_{\widetilde{H}} > \widehat{B}_L.$$

D.2 Solution pour $\widehat{A}_L$

Le Lagrangien du problème (3.13) s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= U\left(W - \widehat{B}_L - p_L\widehat{A}_L\right) + p_L U\left(\widehat{A}_L + \widehat{B}_L\right) \\ &+\lambda\left[\overline{V}_H - U\left(W - \widehat{B}_{\widetilde{H}} - p_L\widehat{A}_L\right) - p_H U\left(\widehat{B}_{\widetilde{H}} + \widehat{A}_L\right) - \mu_H\widehat{B}_{\widetilde{H}}\right] + \mu_L\widehat{B}_L,\end{aligned}$$

où $\mu_i \geq 0$ est le multiplicateur associé à une quantité non négative d'épargne pour l'individu $i \in \{L, H\}$, et $\lambda \geq 0$ est le multiplicateur associé à la contrainte d'incitation.

Les conditions de premier ordre pour la rente et l'épargne sont

$$\widehat{A}_L : -p_L U'\left(W - \widehat{B}_L - p_L\widehat{A}_L\right) + p_L U'\left(\widehat{A}_L + \widehat{B}_L\right) \tag{3.45}$$

$$= \lambda\left[-p_L U'\left(W - \widehat{B}_{\widetilde{H}} - p_L\widehat{A}_L\right) + p_H U'\left(\widehat{B}_{\widetilde{H}} + \widehat{A}_L\right)\right],$$

$$\widehat{B}_{\widetilde{H}} : -U'\left(W - \widehat{B}_{\widetilde{H}} - p_L\widehat{A}_L\right) + p_H U'\left(\widehat{B}_{\widetilde{H}} + \widehat{A}_L\right) + \mu_H = 0, \tag{3.46}$$

$$\widehat{B}_L : -U'\left(W - \widehat{B}_L - p_L\widehat{A}_L\right) + p_L U'\left(\widehat{A}_L + \widehat{B}_L\right) + \mu_L = 0. \tag{3.47}$$

Si la solution respectait $\lambda = 0$, (3.45) se réduirait à $U'\left(W - p_L\widehat{A}_L\right) = U'\left(\widehat{A}_L\right)$ pour la solution de premier rang $\widehat{A}_L = \overline{A}_L = \frac{W}{1+p_L}$ et $\widehat{B}_L = 0$. Cependant, l'individu à risque élevé aurait une utilité indirecte de $(1 + p_H)\, U\left(\frac{W}{1+p_L}\right)$ avec ce contrat, ce qui est supérieure à $\overline{V}_H$, telle que vue sous information parfaite, et la contrainte d'incitation ne serait pas respectée. Par conséquent, la contrainte d'incitation est toujours mordante et

$$\lambda > 0.$$

Il reste donc à caractériser $\widehat{A}_L$. Étant donné $\widehat{B}_{\tilde{H}} \geq \widehat{B}_L \geq 0$, trois solutions sont possibles.

1. $\widehat{B}_{\tilde{H}} = 0 \Rightarrow \widehat{B}_L = 0$, et $\mu_i > 0$, $i \in \{L, H\}$: les conditions (3.46) et (3.47) ne s'appliquent pas et la condition (3.45) devient

$$(1-\lambda)\, U'\left(W - p_L \widehat{A}_L\right) = \left(1 - \lambda \frac{p_H}{p_L}\right) U'\left(\widehat{A}_L\right), \tag{3.48}$$

avec lequel $\lambda = 1$ n'est pas compatible. Considérant que $(1-\lambda)$ et $\left(1 - \lambda \frac{p_H}{p_L}\right)$ doivent être du même signe, deux solutions sont possibles.

(a) $\lambda < 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} (1-\lambda) &> \left(1 - \lambda \frac{p_H}{p_L}\right) \\ &\Rightarrow U'\left(W - p_L \widehat{A}_L\right) < U'\left(\widehat{A}_L\right) \\ &\Rightarrow \widehat{A}_L < \overline{A}_L = \frac{W}{1 + p_L}. \end{aligned}$$

(b) $\lambda > 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |1-\lambda| < \left|1 - \lambda \frac{p_H}{p_L}\right| \\ &\Rightarrow U'\left(W - p_L \widehat{A}_L\right) > U'\left(\widehat{A}_L\right) \\ &\Rightarrow \widehat{A}_L > \overline{A}_L = \frac{W}{1 + p_L}. \end{aligned}$$

Étant donné que λ représente le coût de la contrainte, nous retenons la solution pour laquelle ce coût est le plus faible $\lambda < 1$, d'où $\widehat{A}_L < \overline{A}_L$.

2. $\widehat{B}_{\tilde{H}} > \widehat{B}_L = 0$, et $0 = \mu_H < \mu_L$: en utilisant les conditions (3.45) et (3.46) (la

condition (3.47) ne s'applique pas), on obtient

$$\begin{aligned}
-p_L U'\left(W - p_L \widehat{A}_L\right) + p_L U'\left(\widehat{A}_L\right) &= \lambda (1-p_L) p_H U'\left(\widehat{B}_{\widetilde{H}} + \widehat{A}_L\right) > 0 \\
&\Rightarrow U'\left(W - p_L \widehat{A}_L\right) < U'\left(\widehat{A}_L\right) \\
&\Rightarrow \widehat{A}_L < \overline{A}_L = \frac{W}{1+p_L}.
\end{aligned}$$

3. $\widehat{B}_{\widetilde{H}} > \widehat{B}_L > 0$ et $0 = \mu_H = \mu_L$: le seul fait que l'épargne soit nécessaire pour l'individu à risque faible avec $\widehat{B}_L > 0$ implique que $\widehat{A}_L$ est sous-optimal, d'où

$$\widehat{A}_L < \overline{A}_L = \frac{W}{1+p_L}.$$

De plus, les conditions (3.46), (3.45) et (3.47) se réduisent à

$$U'\left(\widehat{A}_L + \widehat{B}_L\right) = \lambda \frac{p_H}{p_L} U'\left(\widehat{B}_{\widetilde{H}} + \widehat{A}_L\right),$$

ce qui confirme que l'épargne n'empêche pas la contrainte incitative de mordre.

D.3 Comparaison de $\overline{A}_{\widetilde{H}}$ et $\overline{A}_L$

En premier lieu, lorsque le montant de rente $\overline{A}$ n'est pas contraint, on vérifie qu'il n'y a jamais d'épargne, peu importe la comparaison entre la probabilité de survie p et le prix de la rente $\pi < 1$, lequel est inférieur au prix de l'épargne. Le problème est

$$\max_{\overline{A},B} U\left(W - \pi\overline{A} - B\right) + pU\left(\overline{A} + B\right) \tag{3.49}$$

$$\text{sujet à } B \geq 0.$$

Les quantités $\overline{A}$ et B étant des substituts parfaits, une contrainte de non-négativité n'est nécessaire que pour le bien le plus cher. Les conditions de premier ordre sont

$$\begin{aligned} -\pi U'\left(W-\pi\overline{A}-B\right)+pU'\left(\overline{A}+B\right) &= 0 && (3.50)\\ -U'\left(W-\pi\overline{A}-B\right)+pU'\left(\overline{A}+B\right)+\mu &= 0 && (3.51)\\ \mu B &= 0,\ \mu\geq 0, && (3.52)\end{aligned}$$

où μ est le multiplicateur de Lagrange associée à la contrainte $B \geq 0$. Les deux premières conditions deviennent

$$(1-\pi)\,U'\left(W-\pi\overline{A}-B\right)=\mu,$$

et μ est strictement positif tant que $\pi < 1$. Par conséquent, lorsque le montant de rente est choisie sans contrainte et que la prime est fixe, tout individu choisit la solution de coin $B = 0$.

Ensuite, on peut facilement déterminer comment varie le montant optimal de rente, $\overline{A}$, en fonction de la probabilité de survie p, lorsque la prime est fixée à π. On fait la dérivé totale de la condition (3.50)

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\pi^2U''\left(W-p_L\overline{A}\right)+pU''\left(\overline{A}\right)\right]d\overline{A}+U'\left(\overline{A}\right)dp\\ &\Rightarrow \frac{d\overline{A}}{dp}=\frac{-U'\left(\overline{A}\right)}{\pi^2U''\left(W-p_L\overline{A}\right)+pU''\left(\overline{A}\right)}>0.\end{aligned}$$

Ainsi, comme illustré sur le graphique 3.1, on a toujours $\overline{A}_{\widetilde{H}} > \overline{A}_L > \overline{A}_H$.

Annexe E Avec motif de legs

E.1 Conditions de second ordre - Contrat exclusif

Dans le problème non contraint avec primes actuarielles et solutions intérieures, les CPOs du problème d'un individu i, $i \in \{L, H\}$, sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial A_i} &= -p_i U'(W - p_i A_i - B_i) + p_i U'(A_i + B_i) = 0, \qquad (3.53) \\ \frac{\partial u_i}{\partial B_i} &= -U'(W - p_i A_i - B_i) + p_i U'(A_i + B_i) + (1 - p_i)\,\theta U'(B_i) = 0, \end{aligned}$$

et les dérivées secondes sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i^2} &= p_i^2 U''(W - p_i A_i - B_i) + p_i U''(A_i + B_i) < 0, \qquad (3.54) \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial B_i^2} &= U''(W - p_i A_i - B_i) + p_i U''(A_i + B_i) + (1 - p_i)\,\theta U''(B_i) < 0, \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i \partial B_i} &= p_i U''(W - p_i A_i - B_i) + p_i U''(A_i + B_i) < 0. \end{aligned}$$

La CSO est respectée si les dérivées secondes par rapport aux deux variables de choix sont négatives, ce qui est le cas. Comme autre condition, le déterminant de la matrice hessienne doit être positif, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i^2} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i \partial B_i} \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i \partial B_i} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial B_i^2} \end{vmatrix} > 0.$$

Avec quelques manipulations, ce calcule se réduit à

$$(1 - p_i)\, U''(c_1)\, U''(c_2) + p_i U''(c_1)\, \theta U''(h) + U''(c_2)\, \theta U''(h) > 0,$$

ce qui confirme que les solutions du problèmes sont biens des maximums.

E.2 Comparaison de $\overline{A}_L$ et $\overline{A}_H$, et de $\overline{B}_L$ et $\overline{B}_H$

On cherche le signe de $\frac{d\overline{A}_i}{dp_i}$ et $\frac{d\overline{B}_i}{dp_i}$ dans un problème sans contrainte et avec primes actuarielles, dont les CPOs sont calculées comme (3.53). Pour calculer les statiques comparatives, on fait d'abord les dérivées totales par rapport à p_i

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i^2} dA_i + \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i \partial B_i} dB_i + \left[-U'(c_1) + U'(c_2) + p_i A_i U''(c_1)\right] dp_i &= 0 \\
\frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i \partial B_i} dA_i + \frac{\partial^2 u_i}{\partial B_i^2} dB_i + \left[A_i U''(c_1) + U'(c_2) - \theta U'(h)\right] dp_i &= 0
\end{aligned}$$

qui, avec les CPOs, se simplifient en

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i^2} dA_i + \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i^2 \partial B_i^2} dB_i + p_i A_i U''(c_1) dp_i &= 0 \\
\frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i^2 \partial B_i^2} dB_i + \frac{\partial^2 u_i}{\partial B_i^2} dB_i + A_i U''(c_1) dp_i &= 0.
\end{aligned}$$

Ces dérivées totales sont réécrites sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i^2} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i \partial B_i} \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i \partial B_i} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial B_i^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dA_i}{dp_i} \\ \frac{dB_i}{dp_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_i A_i U''(c_1) \\ -A_i U''(c_1) \end{pmatrix}$$

pour être résolues avec la méthode de Cramer. Ainsi,

$$\frac{dA_i}{dp_i} = \frac{\begin{vmatrix} -p_i A_i U''(c_1) & \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i \partial B_i} \\ -A_i U''(c_1) & \frac{\partial^2 u_i}{\partial B_i^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i^2} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i \partial B_i} \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i \partial B_i} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial B_i^2} \end{vmatrix}}$$

où les dérivées secondes sont calculées en (3.54). Le dénominateur étant positif de par la vérification de la CSO, le signe de $\frac{dA_i}{dp_i}$ sera le signe du numérateur.

Donc, le signe de $\frac{dA_i}{dp_i}$ est le signe de

$$A_i U''(c_1) \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i \partial B_i} - p_i A_i U''(c_1),$$

lequel correspond au signe de l'expression

$$p_i (1 - p_i) [\theta U'' (h) - U'' (c_2)] .$$

Ainsi, le signe de $\frac{dA_i}{dp_i}$ n'est pas clairement défini et dépend de la forme fonctionnelle de l'utilité. Par exemple,

- Avec une utilité CARA, l'expression est nulle, donc $\frac{dA_i}{dp_i} = 0 \Rightarrow \overline{A}_L = \overline{A}_H$
- Avec CRRA, l'expression est négative, donc $\frac{dA_i}{dp_i} < 0 \Rightarrow \overline{A}_L > \overline{A}_H$
- Avec une utilité quadratique, l'expression est positive, donc $\frac{dA_i}{dp_i} > 0 \Rightarrow \overline{A}_L < \overline{A}_H$.

Ensuite, avec

$$\frac{dB_i}{dp_i} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i^2} & -p_i A_i U'' (c_1) \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i \partial B_i} & -A_i U'' (c_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i^2} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i \partial B_i} \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i \partial B_i} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial B_i^2} \end{vmatrix}},$$

le signe de $\frac{dB_i}{dp_i}$ est défini par le signe de

$$p_i A_i U'' (c_1) \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i \partial B_i} - A_i U'' (c_1) \frac{\partial^2 u_i}{\partial A_i^2},$$

c'est-à-dire le signe de

$$p_i U'' (c_2) [1 - p_i] < 0.$$

En conséquence, $\frac{dB_i}{dp_i} < 0$ en tout temps et $\overline{B}_L > \overline{B}_H$.

E.3 Comparaison de $\overline{A}_{\widetilde{H}}$ et $\overline{A}_L$

On cherche à déterminer comment varie le montant désiré de rente en fonction de la probabilité de survie p, c'est-à-dire $\frac{\partial \overline{A}}{\partial dp}$, lorsque la prime est fixée à π. Le problème est

$$\max_{\overline{A},\overline{B}>0} u^h = U\left(W - \pi\overline{A} - \overline{B}\right) + pU\left(\overline{A} + \overline{B}\right) + (1-p)\,\theta U\left(\overline{A} + \overline{B}\right) \tag{3.55}$$

et les conditions de premier ordre sont

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^h}{\partial \overline{A}} &= -\pi U'\left(W - \pi\overline{A} - \overline{B}\right) + pU'\left(\overline{A} + \overline{B}\right) = 0, \\
\frac{\partial u^h}{\partial \overline{B}} &= -U'\left(W - \pi\overline{A} - \overline{B}\right) + pU'\left(\overline{A} + \overline{B}\right) + (1-p)\,\theta U'\left(\overline{B}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Ces conditions se résument à

$$U'(c_1) = \frac{p}{\pi} U'(c_2) = \frac{(1-p)}{(1-\pi)} \theta U'(h) \tag{3.56}$$

On fait les dérivées secondes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{A}^2} &= \pi^2 U''(c_1) + pU''(c_2) < 0 \\
\frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{B}^2} &= U''(c_1) + pU''(c_2) + (1-p)\,\theta U''(h) < 0 \\
\frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{A}\partial \overline{B}} &= \pi U''(c_1) + pU''(c_2) < 0.
\end{aligned}$$

Les deux premières dérivées étant négatives, la CSO est respectée si

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{A}^2} & \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{A}\partial \overline{B}} \\ \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{A}\partial \overline{B}} & \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{B}^2} \end{vmatrix} > 0;$$

après quelques manipulations, le déterminant devient

$$(1-p_i)\, U''(c_1)\, U''(c_2) + p_i U''(c_1)\, \theta U''(B_i) + U''(c_2)\, \theta U''(h),$$

ce qui respecte la CSO.

Ensuite, on fait les dérivés totales par rapport à p

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{A}^2} d\overline{A} + \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{A} \partial \overline{B}} d\overline{B} + U'(c_2)\, dp &= 0, \\
\frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{A} \partial \overline{B}} d\overline{A} + \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{B}^2} d\overline{B} + \left[U'(c_2) - \theta U'(h)\right] dp &= 0,
\end{aligned}$$

On réécrit les dérivées totales sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{A}^2} & \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{A} \partial \overline{B}} \\ \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{A} \partial \overline{B}} & \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{B}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{A}}{\partial dp} \\ \frac{\partial \overline{B}}{\partial dp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U'(c_2) \\ -\left[U'(c_2) - \theta U'(h)\right] \end{pmatrix}$$

pour résoudre le système avec la méthode de Cramer.

Avec

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial dp} = \frac{\begin{vmatrix} -U'(c_2) & \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{A} \partial \overline{B}} \\ -\left[U'(c_2) - \theta U'(h)\right] & \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{B}^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{A}^2} & \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{A} \partial \overline{B}} \\ \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{A} \partial \overline{B}} & \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{B}^2} \end{vmatrix}},$$

et un dénominateur positif, le signe de $\frac{\partial \overline{A}}{\partial dp}$ est le signe du numérateur, qui se résume à

$$(\pi - 1)\, U'(c_2)\, U''(c_1) - \theta U'(h)\, \pi U''(c_1) - \theta U'(h)\, p U''(c_2) - (1-p)\, \theta U'(c_2)\, U''(h) > 0$$

Ainsi, $\frac{\partial \overline{A}}{\partial dp} > 0$, ce qui implique que $\overline{A}_L < \overline{A}_{\widetilde{H}}$ en tout temps.

E.4 Conditions de second ordre - Contrat non exclusif

Les CPOs du problème non contraint d'un individu i, $i \in \{L, H\}$, avec primes actuarielles et solutions intérieures, sont

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i}{\partial a_i} &= (1-p_i) R_i U'(W - \pi_i^a R_i) - (1-p_i) R_i \theta U'(R_i(1-a_i)) = 0, \qquad (3.57) \\
\frac{\partial u_i}{\partial R_i} &= -\pi_i^a U'(W - \pi_i^a R_i) + p_i U'(R_i) + (1-a_i)(1-p_i)\, \theta U'(R_i(1-a_i)) = 0,
\end{aligned}$$

où

$$\pi_i^a = p_i a_i + 1 - a_i$$

est le prix unitaire pondéré de la rente.

Les dérivées secondes sont

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i^2} &= (1-p_i)^2 R_i^2 U''(W - \pi_i^a R_i) + (1-p_i) R_i^2 \theta U''(R_i(1-a_i)) < 0, \qquad (3.58) \\
\frac{\partial^2 u_i}{\partial R_i^2} &= \pi_i^{a2} U''(W - \pi_i^a R_i) + p_i U''(R_i) + (1-a_i)^2 (1-p_i) \theta U''(R_i(1-a_i)) < 0, \\
\frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i \partial R_i} &= -\pi_i^a (1-p_i) R_i U''(W - \pi_i^a R_i) - (1-a_i)(1-p_i) R_i \theta U''(R_i(1-a_i)) > 0.
\end{aligned}$$

La CSO est respectée si les dérivées secondes par rapport aux deux variables de choix sont négatives, ce qui est le cas. Comme autre condition, le déterminant de la matrice hessienne doit être positif, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i^2} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i \partial R_i} \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i \partial R_i} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial R_i^2} \end{vmatrix} > 0.$$

Avec quelques manipulations, ce calcule se réduit à

$$p_i(1-p_i)^2 R_i^2 U''(c_1) U''(c_2) + p_i(1-p_i) R_i^2 U''(c_2) \theta U''(h) + p_i^2 (1-p_i) R_i^2 U''(c_1) \theta U''(h) > 0,$$

ce qui confirme que les solutions du problèmes sont biens des maximums.

E.5 Comparaison de $\overline{a}_L$ et $\overline{a}_H$, et de $\overline{R}_L$ et $\overline{R}_H$

On cherche le signe de $\frac{d\overline{a}_i}{dp_i}$ et $\frac{d\overline{R}_i}{dp_i}$ dans un problème sans contrainte et avec primes actuarielles, pour lequel les CPOs sont calculées en (3.57). À partir des dérivées totales des CPOs par rapport à p_i

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i^2} da_i + \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i \partial R_i} dR_i - a_i(1-p_i) R_i^2 U''(c_1) dp_i &= 0, \\
\frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i \partial R_i} da_i + \frac{\partial^2 u_i}{\partial R_i^2} dR_i + a_i \pi_i^a R U''(c_1) dp_i &= 0,
\end{aligned}$$

on réécrit le problème sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i^2} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i \partial R_i} \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i \partial R_i} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial R_i^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{da_i}{dp_i} \\ \frac{dR_i}{dp_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i (1 - p_i) R_i^2 U'' (c_1) \\ -a_i \pi_i^a R U'' (c_1) \end{pmatrix},$$

et la méthode de Cramer est utilisée pour solutionner ce système.

Ainsi,

$$\frac{da_i}{dp_i} = \frac{\begin{vmatrix} a_i (1 - p_i) R_i^2 U'' (c_1) & \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i \partial R_i} \\ -a_i \pi_i^a R U'' (c_1) & \frac{\partial^2 u_i}{\partial R_i^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i^2} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i \partial R_i} \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i \partial R_i} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial R_i^2} \end{vmatrix}};$$

Le dénominateur étant positif de par la vérification de la CSO, le signe de $\frac{da_i}{dp_i}$ sera le signe du numérateur.

En utilisant les dérivées secondes (3.58) et après quelques manipulations, le signe du numérateur correspondra au signe de l'expression

$$(1 - a_i) \theta U'' (h) - U'' (c_2),$$

lequel dépend de la forme fonctionnelle de l'utilité. Par exemple,

- Avec une utilité CARA ou quadratique, l'expression est positive et $\frac{da_i}{dp_i} > 0 \Rightarrow \overline{a}_L < \overline{a}_H$.
- Avec une utilité CRRA, l'expression est nulle et $\frac{da_i}{dp_i} = 0 \Rightarrow \overline{a}_L = \overline{a}_H$.

La deuxième statistique comparative se calcule par

$$\frac{dR_i}{dp_i} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i^2} & a_i (1 - p_i) R_i^2 U'' (c_1) \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i \partial R_i} & -a_i \pi_i^a R U'' (c_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i^2} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i \partial R_i} \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial a_i \partial R_i} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial R_i^2} \end{vmatrix}},$$

et $\frac{dR_i}{dp_i}$ sera aussi du même signe que le numérateur, lequel est du même signe que

$$p_i\,(1-p_i)\,R_i^2\theta U''\,(h)<0.$$

En conséquence, $\frac{dR_i}{dp_i}<0$ en tout temps et $\overline{R}_L>\overline{R}_H$.

E.6 Comparaison de $\overline{a}_{\widetilde{H}}$ et $\overline{a}_L$

On cherche à déterminer comment varie le montant désiré de rente en fonction de la probabilité de survie p, c'est-à-dire $\frac{\partial\overline{a}}{\partial dp}$, lorsque la prime est fixée à π. Le problème est

$$\max_{\overline{a},\overline{R}} u^h=U\left(W-(\pi\overline{a}+1-\overline{a})\,\overline{R}\right)+pU\left(\overline{R}\right)+(1-p)\,\theta U\left(\overline{R}\,(1-\overline{a})\right) \tag{3.59}$$

et les conditions de premier ordre sont

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^h}{\partial\overline{a}} &= (1-\pi)\,\overline{R}U'\left(W-(\pi\overline{a}+1-\overline{a})\,\overline{R}\right)-\overline{R}\,(1-p)\,\theta U'\left(\overline{R}\,(1-\overline{a})\right)=0,\\
\frac{\partial u^h}{\partial\overline{R}} &= -(\pi\overline{a}+1-\overline{a})\,U'\left(W-(\pi\overline{a}+1-\overline{a})\,\overline{R}\right)+pU'\left(\overline{R}\right)\\
&\quad+(1-\overline{a})\,(1-p)\,\theta U'\left(\overline{R}\,(1-\overline{a})\right)=0.
\end{aligned}$$

Ces conditions se résument à

$$U'\,(c_1)=\frac{p}{\pi}U'\,(c_2)=\frac{(1-p)}{(1-\pi)}\theta U'\,(h) \tag{3.60}$$

qui est la même expression que (3.56) avec le contrat exclusif.

On fait les dérivées secondes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} &= (1-\pi)^2\,\overline{R}^2U''\,(c_1)+(1-p)\,\overline{R}^2\theta U''\,(h)<0,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} &= (\pi\overline{a}+1-\overline{a})^2\,U''\,(c_1)+pU''\,(c_2)+(1-a)^2\,(1-p)\,\theta U''\,(h)<0,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial a\partial R} &= -(\pi\overline{a}+1-\overline{a})\,(1-\pi)\,\overline{R}U''\,(c_1)-(1-a)\,(1-p)\,\overline{R}\theta U''\,(h)>0.
\end{aligned}$$

Les deux premières dérivées étant négatives, la CSO est respectée si

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{a}^2} & \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{a} \partial \overline{R}} \\ \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{a} \partial \overline{R}} & \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{R}^2} \end{vmatrix} > 0;$$

après quelques manipulations, le déterminant devient

$$p\left(1-\pi\right)^2 \overline{R}^2 U''\left(c_2\right) U''\left(c_1\right) + p\left(1-p\right) \overline{R}^2 U''\left(c_2\right) \theta U''\left(h\right) + \pi^2 \left(1-p\right) \overline{R}^2 U''\left(c_1\right) \theta U''\left(h\right) > 0,$$

ce qui respecte la CSO.

Ensuite, on fait les dérivés totales par rapport à p

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{a}^2} d\overline{a} + \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{a} \partial \overline{R}} d\overline{R} + \overline{R} \theta U'\left(h\right) dp &= 0, \\ \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{a} \partial \overline{R}} d\overline{a} + \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{R}^2} d\overline{R} + \left[U'\left(c_2\right) - \left(1-\overline{a}\right) \theta U'\left(h\right)\right] dp &= 0. \end{aligned}$$

On réécrit les dérivées totales sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{a}^2} & \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{a} \partial \overline{R}} \\ \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{a} \partial \overline{R}} & \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{R}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{a}}{\partial dp} \\ \frac{\partial \overline{R}}{\partial dp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{R} \theta U'\left(h\right) \\ -\left[U'\left(c_2\right) - \left(1-\overline{a}\right) \theta U'\left(h\right)\right] \end{pmatrix}$$

pour résoudre le système avec la méthode de Cramer.

Avec

$$\frac{\partial \overline{a}}{\partial dp} = \frac{\begin{vmatrix} -\overline{R} \theta U'\left(h\right) & \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{a} \partial \overline{R}} \\ -\left[U'\left(c_2\right) - \left(1-\overline{a}\right) \theta U'\left(h\right)\right] & \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{R}^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{a}^2} & \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{a} \partial \overline{R}} \\ \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{a} \partial \overline{R}} & \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{R}^2} \end{vmatrix}}$$

et un dénominateur positif, le signe de $\frac{\partial \overline{a}}{\partial dp}$ est le signe du numérateur, qui se résume avec quelques autres manipulations à

$$\begin{aligned} &-\left[\left(\pi \overline{a} + 1 - \overline{a}\right)\left(1-\pi\right) U''\left(c_1\right) + \left(1-a\right)\left(1-p\right) \theta U''\left(h\right)\right] U'\left(c_2\right) \\ &-\left[p U''\left(c_2\right) + \pi \left(\pi \overline{a} + 1 - \overline{a}\right) U''\left(c_1\right)\right] \theta U'\left(h\right) > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{\partial \overline{a}}{\partial dp} > 0$, ce qui implique que $\overline{a}_L < \overline{a}_{\widetilde{H}}$ en tout temps.

E.7 Comparaison de $u_{\widetilde{H}}^{*h}(a)$ et $u_{\widetilde{H}}^{*h}(A(a))$

Dans un plan dont l'abscisse est a, ces deux fonctions ont le même point de départ à $a = 0$ et le même point d'arrivé à $a = \overline{a}_{\widetilde{H}}$, qui est leur valeur optimale. Le but est alors de comparer leur pente respective lorsque $a \to 0^+$.

En premier lieu,

$$u_{\widetilde{H}}^{*h}(A(a)) = \max_{B>0} U(W - p_L A - B) + p_H U(A + B) + (1 - p_H)\theta U(B),$$

où

$$A = \frac{aB}{1-a}.$$

La pente de cette fonction est

$$\begin{aligned}\frac{du_{\widetilde{H}}^{*h}(A(a))}{da} &= \frac{du_{\widetilde{H}}^{*h}(A(a))}{dA}\frac{dA}{da} \\ &= \left[-p_L U'(c_1) + p_H U'(c_2)\right]\left[\frac{B}{(1-a)^2} + \frac{a}{1-a}\frac{dB}{dA}\right].\end{aligned} \tag{3.61}$$

Ensuite,

$$u_{\widetilde{H}}^{*h}(a) = \max_{R} U(W - (p_L a + 1 - a)R) + p_H U(R) + (1 - p_H)\theta U(R(1-a)),$$

avec une pente de

$$\frac{du_{\widetilde{H}}^{*h}(a)}{da} = (1 - p_L) RU'(c_1) - R(1 - p_H)\theta U'(h). \tag{3.62}$$

Étant donné que R est optimisé, nous utilisons sa CPO

$$-(p_L a + 1 - a) U'(c_1) + p_H U'(c_2) + (1-a)(1-p_H)\theta U'(h) = 0$$

afin de faciliter la comparaison entre les deux calculs de pente. L'expression (3.62) devient donc

$$\frac{du_{\widetilde{H}}^{*h}(a)}{da} = \left[-p_L U'(c_1) + p_H U'(c_2)\right]\frac{R}{(1-a)},$$

et l'expression entre crochet est la même que l'expression du premier crochet de (3.62).

La comparaison entre les deux pentes lorsque $a \to 0^+$ dépend donc de la comparaison

$$\lim_{a \to 0^+} \left[\frac{B}{(1-a)^2} + \frac{a}{1-a} \frac{dB}{dA} \right] \; versus \; \lim_{a \to 0^+} \frac{R}{(1-a)}$$
$$\Rightarrow B \; versus \; R$$

Naturellement, $B = R$ lorsque $a = 0$, car tout le revenu de retraite est constitué d'épargne traditionnelle. Cependant, aussitôt qu'est ajouté un élément de couverture viagère, soit légèrement à la droite de $a = 0$, on a $B < R$.

En conclusion

$$\frac{du_{\widetilde{H}}^{*h}(A(a))}{da} < \frac{du_{\widetilde{H}}^{*h}(a)}{da}.$$

Conclusion générale

Dans le premier chapitre de cette thèse, la richesse induit le choix d'un mode de vie plus sain, ce qui implique que les inégalités économiques se traduisent par une inégalité dans la longévité. Par contre, les mécanismes assurant le risque de longévité influencent aussi le mode de vie des individus.

Dans un monde optimal au sens de Pareto, une personne est en mesure d'internaliser l'effet de son mode de vie sur le prix de la rente viagère achetée auprès d'un assureur. Inversement, une absence d'internalisation cause un surinvestissement dans la longévité qui augmente le coût du financement de la retraite. C'est ce qui se produit dans tout système où un individu ne peut envisager l'effet de ses décisions sur des coûts découlant des actions de tous ses concitoyens. Selon Philipson et Becker (1998), cet effet d'aléa moral rend le système public sous-optimal par rapport à un système privé de retraite.

Cependant, nous démontrons que ce problème de non-internalisation existe aussi dans un marché privé confronté à l'antisélection, car le mécanisme incitatif, en éliminant l'avantage d'acheter le contrat conçu pour un autre rentier, élimine du coup le signal qui permet l'internalisation. S'ajoute à cette imperfection l'externalité d'information qui réduit le montant de pension de façon inversement proportionnelle au niveau de risque, et donc de richesse : ensembles, ces deux imperfections augmentent les inégalités de longévité.

Un système public de pension a souvent comme caractéristique de combler les besoins des personnes démunies, mais d'être nettement insuffisant pour celles plus fortunées. Par contre, une tarification non différenciée est régressive, car les gens à faible longévité subventionnent ceux qui vivront plus longtemps, donc une subvention des pauvres envers les riches.

Un système public plus sophistiqué, mais soumis aux mêmes contraintes d'information que les assureurs privés, peut exploiter la nature obligatoire du système et établir une tarification actuarielle au niveau de la population plutôt qu'au niveau individuel. L'échelle de contribution agit alors dans le mécanisme incitatif par une rente d'information qui atténue la réduction dans le montant de pension, mais qui rend le système régressif en avantageant les personnes à risque élevé. Néanmoins, il procure un plus grand bien-être à la population que l'assurance privée de par le nombre réduit de contraintes de tarification.

Dans le deuxième chapitre, le risque de soins de longue durée (SLD) crée, avec celui de longévité, une structure de corrélation particulière qui affecte les contrats vendus dans des marchés d'assurance incomplets ou complets faisant face à l'antisélection.

En premier lieu, nous remettons en question la limite de surassurance lorsque les assurés ne présentent pas de menace d'aléa moral, comme c'est le cas avec l'assurance de SLD. Cette limite n'a pas d'impacts sur un assureur concurrentiel, mais sa levée est bénéfique pour l'assuré. En effet, une couverture excédentaire assure, en partie, un second risque corrélé positivement au premier. Cette distorsion étant propre à chaque niveau de risque, elle sert aussi de mécanisme révélateur afin d'atténuer et même d'éliminer l'externalité d'information associée à l'antisélection.

De plus, nous cherchons aussi à refléter une réalité de marché qui veut qu'un contrat de rente ne soit pas exclusif. Quoique la portion viagère de la rente, qui capte les options de paiement au décès, puisse servir de seconde dimension dans un contrat révélateur en lieu de la quantité, elle ne peut jouer de rôle discriminant lorsqu'il n'y a pas de motif de legs. Sous antisélection, l'assureur doit donc offrir un contrat linéaire dans un équilibre qui se veut mélangeant.

Toujours sous antisélection, mais avec des risques assurés séparément dans un marché complet, la surassurance entraîne un enchaînement bénéfique d'externalités a priori négatives. Ainsi, la personne en santé ayant une rente subventionnée par la personne en mauvaise santé, elle génère une externalité d'information qui réduit la protection viagère de la seconde personne. Cette personne en mauvaise santé souhaite alors compenser ce manque par la surassurance de son risque de SLD, ce qu'elle obtient à titre de risque élevé sur ce marché. À son tour, cette surassurance diminue l'externalité d'information sur le contrat incitatif de SLD de la personne en bonne santé, qui bénéficie donc de ce gain de bien-être en ayant été à la source de la première externalité d'information.

Une autre conclusion de ce chapitre est que le contrat incitatif multirisque doit tenir compte de l'identité de la personne globalement à faible risque lorsque les couvertures sont conçues différemment pour chaque risque. De plus, en étant combinée avec une couverture exclusive, la tarification de la rente se sépare : la personne en bonne santé perd alors l'avantage de la rente subventionnée de l'équilibre mélangeant et doit payer sa prime actuarielle qui est élevée, ce qui peut lui faire préférer un marché où les risques sont assurés séparément. Il s'agit d'une contradiction d'un résultat de la littérature sur l'assurance où un contrat multirisque est sensé amélioré le bien-être de tout type d'assuré en exploitant la corrélation dans la population.

Le troisième chapitre compare le modèle de contrat de rente non exclusif présenté au chapitre précédent avec un modèle de contrat exclusif. Plusieurs éléments indiquent que ce dernier ne correspond pas à la réalité du marché des rentes ; il est néanmoins souvent utilisé dans la littérature théorique. Le but de notre analyse est de valider comment cette propriété, ou son absence, affecte l'équilibre de marché sous antisélection.

Une conséquence d'un modèle imposant la propriété d'exclusivité sous antisélection est un équilibre séparateur avec un menu de contrats non linéaires définis par deux dimensions, un prix et une quantité de rente. Cependant, cette prédiction ne correspond pas aux résultats empiriques de Finkelstein et Poterba (2004) qui n'ont pas détecté de sélection sur le montant de rente.

Par contre, cette même étude a identifié une sélection sur l'option de paiement au décès. En modélisant un contrat non exclusif présentant une telle option, il est possible de reproduire ce résultat en obtenant un équilibre séparateur, où le contrat est constitué des dimensions prix et portion viagère. Cet équilibre est possible si l'individu accorde une valeur positive au legs, c'est-à-dire s'il reconnaît la désutilité d'un paiement au décès. Par contre, il est intéressant de noter que la tarification séparée est aussi possible lorsque cette couverture est combinée, dans un contrat multirisque, avec une seconde couverture qui présente la propriété d'exclusivité, comme démontré au chapitre précédent. Autrement, l'équilibre rejette la portion viagère comme deuxième dimension de la tarification, et consiste en un contrat linéaire unique.

Ce troisième chapitre nous fait voir qu'une autre contribution de Finkelstein et Poterba (2004) est d'amener une évidence supplémentaire quant à la présence d'un motif de legs chez les rentiers. Nous notons, cependant, que cette étude a porté sur le marché britannique ; quoiqu'elle considère un nombre considérable de contrats, elle date de plus de 10 ans. Des travaux empiriques ont aussi été faits sur d'autres marchés au cours des ans, mais à notre connaissance, jamais sur le rôle, dans la sélection, des options de paiement à la succession. Il serait donc intéressant de confirmer si les mêmes résultats s'observent sur d'autres marchés et sur des périodes plus récentes.

Enfin, considérant les expériences naturelles que constituent les réformes des systèmes de pension de plusieurs pays, tant publics que privés, récentes ou anticipées, une fenêtre d'opportunité est ouverte pour la collecte de données pertinentes qui pourraient alors valider les questionnements découlant des trois chapitres de cette thèse. Par exemple, une personne qui doit désormais prendre en charge son risque de longévité plutôt que de compter sur une solution collective investira-t-elle différemment dans son capital santé ? Comment agiront les assureurs devant les besoins accrus de la population vieillissante ? Dans un marché plus mature, ces assureurs seront-ils en mesure d'établir des processus de sélection plus efficaces ? Les réponses devraient éventuellement amener un éclairage sur les réformes futures.

Bibliographie

[1] Benartzi, Shlomo, Previtero, Alessandro and Thaler, Richard H. 2011. "Annuitization Puzzles", *Journal of Economic Perspectives,* Vol. 25, No. 4 (Fall), pp. 143–164.

[2] Bernheim, B. Douglas. 1991. "How Strong Are Bequest Motives ? Evidence Based on Estimates of the Demand for Life Insurance and Annuities", *The Journal of Political Economy,* Vol. 99, No. 5 (October), pp. 899-927

[3] Bond, Eric W. and Crocker Keith J. 1991. "Smoking, Skydiving, and Knitting : The Endogenous Categorization of Risks in Insurance Markets with Asymmetric Information", *The Journal of Political Economy,* Vol. 99, No. 1 (February), pp. 177-200.

[4] Brown, Jeffrey and Finkelstein, Amy. 2009. "The Private Market for Long-Term Care Insurance in the United States : A Review of the Evidence", *The Journal of Risk and Insurance,* Vol. 76, No. 1, pp. 5-29.

[5] _____________. 2009. "The Interaction of Public and Private Insurance : Medicaid and the Long-Term Care Insurance Market", *The American Economic Review,* Vol. 98, No. 3, (June), pp. 1083–1102.

[6] _____________. 2007. "Why Is the Market for Long-Term Care Insurance So Small ?", *Journal of Public Economics*, Vol. 91, No. 10, (November), pp. 1967-1991.

[7] Brown, Jeffrey R. 2007. "Rational and Behavioral Perspectives on the Role of Annuities in Retirement Planning", *National Bureau of Economic Research (Cambridge, MA),* Working Paper No. 13537, (October).

[8] ______________. 2001. "Private pensions, mortality risk, and the decision to annuitize", *Journal of Public Economics,* Vol. 82, No. 1, (October), pp. 29–62.

[9] Cambois, Emmanuelle, Clavel, Aurore, Romieu, Isabelle, and Robine, Jean-Marie. 2008. "Trends in disability-free life expectancy at age 65 in France : consistent and diverging patterns according to the underlying disability measure", *European Journal of Ageing,* Vol. 5, No. 4, (December), pp.287-298.

[10] Cropper, M.L. 1977. "Health, Investment in Health, and Occupational Choice", *Journal of Political Economy,* Vol. 85, No 6 (December), pp. 1273-1294.

[11] Cutler, David M., Ghosh, Kaushik, and Landrum, Mary Beth. 2013. "Evidence for Significant Compression of Morbidity In the Elderly U.S. Population", *National Bureau of Economic Research (Cambridge, MA),* Working Paper No. 19268, (July).

[12] Davidoff, Thomas, Brown, Jeffrey R. and Diamond, Peter A. 2005. "Annuities and Individual Welfare", *The American Economic Review,* Vol. 95, No. 5, (December), pp. 1573-1590.

[13] Davies, James B., and Peter Kuhn. 1992. "Social security, longevity, and moral hazard", *Journal of Public Economics,* Vol. 49, No. 1 (October), pp. 91–106.

[14] Diamond, Peter A. 1977. "A Framework For Social Security analysis", *Journal of Public Economics,* Vol. 8, No. 3 (December), pp. 275-298.

[15] Doherty, Neil A., Schlesinger, Harris. 1983. "Optimal Insurance in Incomplete Markets", *The Journal of Political Economy,* Vol. 91, No. 6, (December), pp. 1045–1054.

[16] Dynan, Karen E., Skinner, Jonathan and Zeldes, Stephen P. 2004. "Do the Rich Save More ?", *The Journal of Political Economy,* Vol. 112, No. 2 (April), pp. 397-444.

[17] Eckstein, Zvi, Eichenbaum, Martin and Peled, Dan. 1985. "Uncertain lifetimes and the welfare enhancing properties of annuity markets and social security", *Journal of Public Economics,* Vol. 26, No. 3 (April), pp. 303–326.

[18] Ehrlich, Isaac and Chuma, Hiroyuki. 1990. "A Model of the Demand for Longevity and the Value of Life Extension", *The Journal of Political Economy,* Vol 98, No 4 (August), pp. 761-782.

[19] Eichenbaum, Martin and Peled, Dan. 1987. "Capital Accumulation and Annuities in an Adverse Selection Economy", *The Journal of Political Economy,* Vol. 95, No. 2 (April), pp. 334-354.

[20] Finkelstein, Amy and Poterba, James. 2006. "Testing For Adverse Selection With "Unused Observables"", *National Bureau of Economic Research (Cambridge, MA),* Working Paper No. 12112 (March).

[21] ______________. 2004. "Adverse Selection in Insurance Markets : Policyholder Evidence from the U.K. Annuity Market", *The Journal of Political Economy,* Vol. 112, No. 1, (February), pp. 183-208.

[22] ______________. 2002. "Selection Effects in the United Kingdom Individual Annuities Market", *Economic Journal,* Vol. 112, No. 476, (January), pp. 28-50.

[23] Fluet, Claude and Pannequin, François. 1997. "Complete Versus Incomplete Insurance Contracts under Adverse Selection with Multiple Risks", *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, Vol. 22, pp. 81-101.

[24] Friedman Benjamin M. and Warshawsky Mark J. 1990. "The Cost of Annuities : Implications for Saving Behavior and Bequests", *The Quarterly Journal of Economics,* Vol. 105, No. 1, (February), pp. 135-154.

[25] Fries, James M. 1980. "Aging, natural death, and the compression of morbidity", *The New England Journal of Medicine,* Vol. 303, No. 3, pp. 130-135.

[26] Gale, William G. and Scholz, John K. 1994. "Intergenerational Transfers and the Accumulation of Wealth", *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 8, No. 4 (Autumn), pp. 145-160.

[27] GOLLIER, C. and SCHLESINGER. H. [1995] : "Second-Best Insurance Contract Design in an Incomplete Market", *The Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 97, No. 1 (March), pp. 123-135.

[28] Grabowski, David C. and Gruber, Jonathan. 2007. "Moral hazard in nursing home use", *Journal of Health Economics,* Vol. 26, No. 3, (May), pp 560–577.

[29] Grossman, M. 1998. "On the optimal lenght of life", *Journal of Health Economics,* Vol. 17, No 4 (August), pp. 499–509.

[30] _____________. 1972. "On the concept of health capital and the demand for health", *Journal of Political Economy,* Vol. 80, No 2 (March-April), pp. 223–255.

[31] Hurd, Micheal D. 1989. "Mortality Risk and Bequests", *Econometrica,* Vol. 57, No. 4, (July), pp. 779-813.

[32] _____________. 1987. "Savings of the Elderly and Desired Bequests", *American Economic Review,* Vol. 77, No. 3 (June), pp. 298-312.

[33] International Social Security Association. 2010. "Technical Commission on Old-Age, Invalidity and Survivors' Insurance : Summary of findings 2008-2010", *Available at http ://www.issa.int/Topics/Old-age-Survivors/Other-resources (downloaded on September 5, 2011).*

[34] Kalache, Alexandre, Aboderin, Isabella, and Hoskins, Irene. 2002. "Compression of morbidity and active ageing : key priorities for public health policy in the 21st century", *Bulletin of the World Health Organization,* Vol. 80, No. 3, pp. 243-244.

[35] Lakdawalla, Darius, and Philipson, Tomas. 2002. "The Rise in Old Age Longevity and the Market for Long-Term Care", *The American Economic Review,* Vol. 92, No. 1 (March), pp. 295-306.

[36] Levhari, David and Mirman, Leonard J. 1977. "Savings and Consumption with an Uncertain Horizon", *The Journal of Political Economy,* Vol. 85, No. 2, (April), pp. 265–281.

[37] Lubitz, James, Beebe, James and Baked, Colin. 1995. "Longevity and Medicare Expenditure", *The New England Journal of Medicine,* Vol. 332, No. 15, (April), pp. 999-1003.

[38] Mitchell, Olivia S ,Poterba, James M.,Warshawsky, Mark J. and Brown Jeffrey R. 1999. "New Evidence on the Money's Worth of Individual Annuities", *The American Economic Review*, Vol. 89, No. 5, (December), pp. 1299-1318.

[39] Murtaugh, Christopher M., Kemper, Peter, and Spillman, Brenda. 1995. "Risky Business : Long-Term Care Insurance Underwriting", *Inquiry*, Vol. 32, No. 3, (Fall), pp. 271-284.

[40] Murtaugh, Christopher M., Spillman, Brenda C. and Warshawsky, Mark J. 2001. "In Sickness and in Health : An Annuity Approach to Financing Long-Term Care and Retirement Income", *The Journal of Risk and Insurance,* Vol. 68, No. 2, (June), pp. 225-253.

[41] Office for National Statistics, Department for Work and Pensions. 2005. "Focus on Older People", Office for National Statistics, London.

[42] Pauly, Mark V. 1974. "Overinsurance and Public Provision of Insurance : The Roles of Moral Hazard and Adverse Selection", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 88, No. 1 (February), pp. 44-62.

[43] Philipson, Tomas J. and Becker Gary S. 1998. "Old-Age Longevity and Mortality-Contigent Claims", *The Journal of Political Economy*, Vol. 106, No. 3 (June), pp. 551-573.

[44] Platoni, Silvia. 2010. "Asymmetric Information and Annuities", *Journal of Public Economic Theory,* Vol. 12, No. 3 (June), pp. 501–532.

[45] Rothschild, Michael and Stiglitz, Joseph. 1976. "Equilibrium in Competitive Insurance Markets : An Essay on the Economics of Imperfect Information", *The Quarterly Journal of Economics,* Vol. 90, No. 4, (November), pp. 629-649.

[46] Salanié, Bernard. 1994. Théorie des contrats. Éditor : Paris Économica.

[47] Skinner, Jonathan and Zeldes, Stephen P. 2002. "The Importance of Bequests and Life-Cycle Saving in Capital Accumulation : A New Answer", *The American Economic Review,* Vol. 92, No. 2 (May), pp.274-278.

[48] University of California, Berkeley (USA), and Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). 2013. "Human Mortality Database". *Available at www.mortality.org (data downloaded on September 6th, 2013).*

[49] U. S. Social Security Administration. 2010. "The 2010 Annual Report of the Board of Trustees of the Federal Old-Age and Survivors Insurance and Federal Disability Insurance Trust Funds". *Available at www.ssa.gov downloaded on October 7th, 2010).*

[50] Webb, David C. 2009. "Asymmetric Information, Long-Term Care Insurance, and Annuities : The Case for Bundled Contracts", *The Journal of Risk and Insurance,* Vol. 76, No. 1, pp. 53-85.

[51] Wilson, Charles. 1977. "A model of insurance markets with incomplete information", *Journal of Economic Theory,* Vol. 16, No. 2 (December), pp. 167-207.

[52] Yaari, Menahem E. 1965. "Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer", *The Review of Economics Studies,* Vol. 32, No. 2, (April), pp. 137–150.